А. Г. Мерзляк
Д. А. Номіровський
В. Б. Полонський
М. С. Якір

ГЕОМЕТРІЯ

ПОЧАТОК ВИВЧЕННЯ НА ПОГЛИБЛЕНОМУ РІВНІ З 8 КЛАСУ

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ

підручник для 10 класу
закладів загальної середньої освіти

Харків
«Гімназія»
2018

УДК [373.5 : 372.851] : 514.1
М52

Мерзляк А. Г.

М52 Геометрія : початок вивчення на поглибл. рівні, проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2018. — 272 с. : іл.
ISBN 978-966-474-314-0.

УДК [373.5 : 372.851] : 514.1

ISBN 978-966-474-314-0

ВІД АВТОРІВ

Любі десятикласники та десятикласниці!

Ми маємо надію, що ви не розчарувалися, обравши нелегкий шлях — вивчати математику за програмою поглибленого рівня. Це не просто. Потрібно бути наполегливими та завзятими, уважними й акуратним, при цьому найголовніше — не бути байдужими до математики, а любити цю красиву науку. Сподіваємося, що ви з інтересом будете засвоювати нові знання.

У 9 класі ви завершили вивчення курсу планіметрії — розділу геометрії, у якому розглядали плоскі фігури та їхні властивості. Однак більшість об'єктів, що нас оточують, — створених як людиною, так і природою, — не є плоскими (рис. 1).

Дзвіниця Києво-Печерської лаври

Український літак Ан-225 «Мрія» — найбільший літак у світі

Планета Земля

Рис. 1

Розділ геометрії, у якому вивчають фігури в просторі та їхні властивості, називають ***стереометрією***.

Слово «стереометрія» походить від грецьких слів «стереос» — «об'ємний», «просторовий» і «метрео» — «вимірювати».

Ви починаєте вивчати стереометрію.

Знати стереометрію надзвичайно важливо. Без просторової уяви та глибоких геометричних знань неможливо опанувати інженерні професії, будівельну або архітектурну справу, працювати в галузі комп'ютерної графіки, дизайну, моделювання одягу та взуття тощо. І це зрозуміло, адже стереометрія досліджує математичні моделі тих матеріальних об'єктів, з якими люди щодня мають справу. Узагалі, стереометрія є одним з основних інструментів пізнання навколишнього світу.

Крім того, стереометрія — красивий та цікавий шкільний предмет, який розвиває логічне й абстрактне мислення, увагу й акуратність. Ми сподіваємося, що ви в цьому скоро переконаєтеся, чому сприятиме підручник, який ви тримаєте в руках.

Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Підручник поділено на чотири параграфи, кожний з яких складається з пунктів. Вивчаючи теоретичний матеріал пункту, особливу увагу звертайте на текст, який надруковано **жирним шрифтом**, ***жирним курсивом*** і *курсивом*; так у книзі виділено означення, правила та найважливіші математичні твердження.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один із можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту дібрано задачі для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю, так і важкі.

Якщо після виконання домашніх завдань залишається вільний час і ви хочете дізнатися більше, то рекомендуємо звернутися до рубрики «Коли зроблено уроки». Матеріал, викладений там, непростий. Але тим цікавіше випробувати свої сили!

Дерзайте! Бажаємо успіху!

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

n° завдання, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень;

$n^{\bullet}$ завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;

$n^{\bullet\bullet}$ завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;

n^{*} задачі для математичних гуртків і факультативів;

ключові задачі, результати яких можуть бути використані під час розв'язування інших задач;

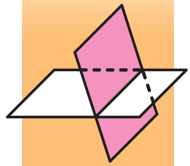
завдання, які можна виконувати за допомогою комп'ютера;

закінчення доведення теореми або розв'язання задачі;


рубрика «Коли зроблено уроки».

Зеленим кольором позначено номери задач, що рекомендовано для домашньої роботи, **синім** кольором — номери задач, які можна розв'язувати усно.

ВСТУП ДО СТЕРЕОМЕТРІЇ §1



У цьому параграфі ви ознайомитеся з основними поняттями стереометрії, аксіомами стереометрії та наслідками з них. Отримаєте початкові уявлення про многогранники.

1. Основні поняття стереометрії. Аксіоми стереометрії

Вивчаючи математику, ви з багатьма поняттями ознайомилися за допомогою означень. Так, із курсу планіметрії вам добре відомі означення чотирикутника, трапеції, кола тощо.

Означення будь-якого поняття основане на інших поняттях, зміст яких вам уже відомий. Наприклад, розглянемо означення трапеції: «Трапецією називають чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші не паралельні». Бачимо, що означення трапеції ґрунтується на таких уже введених поняттях, як чотирикутник, сторона чотирикутника, паралельні та непаралельні сторони тощо. Отже, означення вводять за принципом «нове основане на старому». Тоді зрозуміло, що мають існувати первинні поняття, яким означень не дають. Їх називають **основними поняттями** (рис. 1.1).

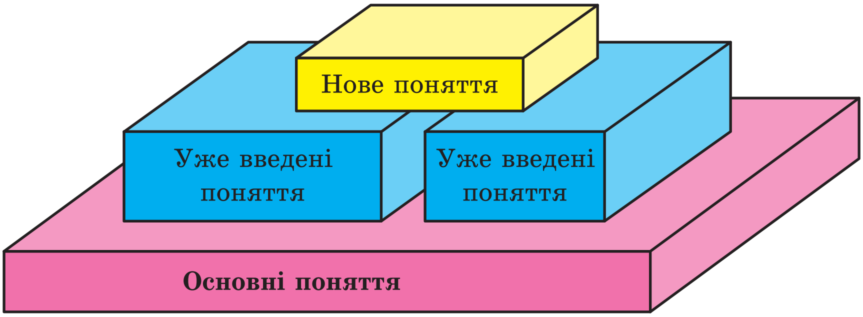


Рис. 1.1

У курсі планіметрії, який ви вивчили, означення не давали таким фігурам, як точка й пряма. У стереометрії, крім них, до основних понять віднесемо ще одну фігуру — **площину**.

Наочне уявлення про площину дають поверхня водойми в безвітряну погоду, поверхня дзеркала, поверхня полірованого стола, подумки продовжені в усіх напрямах.

Використовуючи поняття площини, можна вважати, що в планіметрії ми розглядали тільки одну площину, і всі фігури, які вивчалися, належали цій площині. У стереометрії ж розглядають безліч площин, розміщених у **просторі**.

Як правило, площини позначають малими грецькими літерами α, β, γ, ... На рисунках площини зображають у вигляді паралелограма (рис. 1.2) або інших обмежених частин площини (рис. 1.3).

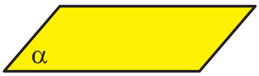


Рис. 1.2

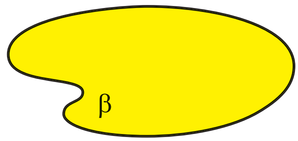


Рис. 1.3

Площина, так само як і пряма, складається з точок, тобто площина — це множина точок.

Існує кілька випадків взаємного розміщення точок, прямих і площин у просторі. Наведемо приклади.

На рисунку 1.4 зображено точку A, яка належить площині α. Також говорять, що *точка A лежить у площині α або площина α проходить через точку A*. Коротко це можна записати так: $A \in \alpha$. Наведений запис означає, що точка A є елементом множини точок, які являють собою площину α.

На рисунку 1.5 зображено точку B, яка не належить площині β. Коротко це можна записати так: $B \notin \beta$.

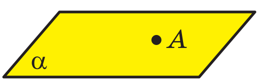


Рис. 1.4

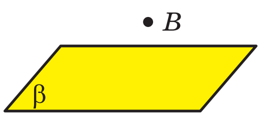


Рис. 1.5

Рис. 1.6

На рисунку 1.6 зображено пряму a, яка належить площині α. Також говорять, що *пряма a лежить у площині α або площина α проходить через пряму a*. Коротко це можна записати так: $a \subset \alpha$. Наведений запис означає, що множина точок прямої a є підмножиною множини точок, які являють собою площину α.

Якщо пряма та площина мають тільки одну спільну точку, то говорять, що **пряма перетинає площину**. На рисунку 1.7 зображено пряму a, яка перетинає площину α в точці A. Записують[1]: $a \cap \alpha = A$.

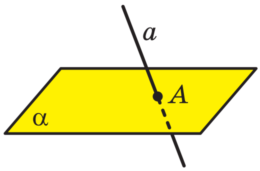


Рис. 1.7

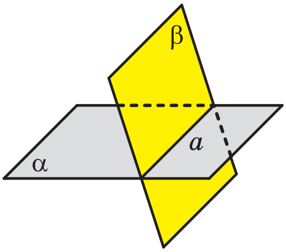


Рис. 1.8

Далі, говорячи «дві точки», «три прямі», «дві площини» тощо, матимемо на увазі, що це різні точки, різні прямі та різні площини.

Якщо всі спільні точки двох площин утворюють пряму, то говорять, що ці площини **перетинаються**.

На рисунку 1.8 зображено площини α і β, які перетинаються по прямій a. Записують: $\alpha \cap \beta = a$.

На початковому етапі вивчення стереометрії неможливо доводити теореми, спираючись на інші твердження, оскільки цих тверджень ще немає. З огляду на це перші властивості, які стосуються точок, прямих і площин у просторі, приймають без доведення. Як ви знаєте з курсу планіметрії, такого роду твердження називають аксіомами.

Зазначимо, що деякі аксіоми стереометрії за формулюваннями дослівно збігаються з відомими вам аксіомами планіметрії. Наприклад:

- *якою б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що не належать їй*;
- *через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну.*

Ми не будемо ознайомлюватися зі строгою аксіоматичною побудовою стереометрії[2]. Розглянемо лише деякі твердження, що виражають основні властивості площин простору, спираючись на які зазвичай будують курс стереометрії в школі.

---

[1] Якщо формально строго скористатися символікою теорії множин, то потрібно було б записувати: $a \cap \alpha = \{A\}$. Проте в геометрії прийнято наведений у тексті запис без фігурних дужок.

[2] Докладніше про аксіоматичний метод ви можете дізнатися, прочитавши оповідання на с. 32–34.

Аксіома А1. Для будь-якої площини простору існує точка, яка їй не належить.

Із цієї аксіоми випливає, що площина не заповнює всього простору. Іншими словами, у стереометрії, на відміну від планіметрії, не всі фігури лежать в одній площині.

Аксіома А2. У будь-якій площині простору виконуються всі аксіоми планіметрії.

Якщо в будь-якій площині простору виконуються аксіоми планіметрії, то виконуються і наслідки із цих аксіом, тобто теореми планіметрії. Отже, у стереометрії можна користуватися всіма відомими нам властивостями плоских фігур.

Аксіома А3. Через будь-які три точки простору, що не лежать на одній прямій, проходить площина, і до того ж тільки одна.

Рисунки 1.9–1.11 ілюструють цю аксіому.

Рис. 1.9

Рис. 1.10

Рис. 1.11

Із наведеної аксіоми випливає, що три точки простору, які не лежать на одній прямій, визначають єдину площину, що проходить через ці точки. Отже, для позначення площини можна вказати будь-які три її точки, що не лежать на одній прямій. Наприклад, на рисунку 1.12 зображено площину ABC.

Запис $M \in ABC$ означає, що точка M належить площині ABC. Запис $MN \subset ABC$ означає, що пряма MN належить площині ABC (рис. 1.12).

Аксіома А4. Якщо дві точки прямої належать площині, то й уся пряма належить цій площині.

Наприклад, на рисунку 1.13 точки A, B і C належать площині ABC. Тоді можна записати: $AB \subset ABC$, $BC \subset ABC$.

Із цієї аксіоми випливає, що коли пряма не належить площині, то вона має з даною площиною не більше ніж одну спільну точку.

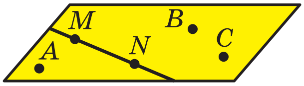


Рис. 1.12

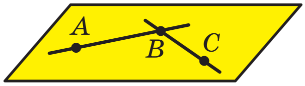


Рис. 1.13

Рис. 1.14

Твердження, сформульоване в аксіомі **А4**, часто використовують на практиці, коли хочуть перевірити, чи є дана поверхня рівною (плоскою). Для цього до поверхні в різних місцях прикладають рівну рейку та перевіряють, чи є зазор між рейкою та поверхнею (рис. 1.14).

Аксіома А5. Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій.

Цю аксіому можна проілюструвати за допомогою зігнутого аркуша паперу або за допомогою вашого підручника (рис. 1.15).

Аксіома А6. Відстань між будь-якими двома точками простору є однаковою для будь-якої площини, що проходить через ці точки.

Сутність цієї аксіоми полягає в тому, що відстань між будь-якими двома точками простору не залежить від того, на якій площині, що проходить через ці точки, її виміряли.

Задача. Доведіть, що коли дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку.

Розв'язання. Нехай точка A є спільною для двох площин α і β, тобто $A \in \alpha$ і $A \in \beta$ (рис. 1.16). За аксіомою **А5** площини α і β перетинаються по прямій. Нехай $\alpha \cap \beta = a$. Тоді всі спільні точки площин α і β належать прямій a. Точка A є спільною для площин α і β. Отже, $A \in a$. ◄

Рис. 1.15

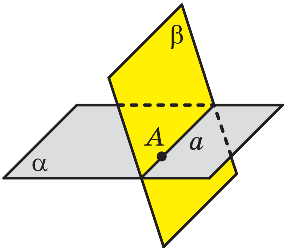


Рис. 1.16

1. Як у математиці називають первинні поняття, яким не дають означення?
2. Які фігури входять до списку основних понять стереометрії?
3. У якому разі говорять, що пряма перетинає площину?
4. У якому разі говорять, що площини перетинаються?
5. Сформулюйте аксіоми **А1, А2, А3, А4, А5, А6**.

ВПРАВИ

1.1.° Зобразіть площину α, точку M, що їй належить, і точку K, що їй не належить. Запишіть це за допомогою відповідних символів.

1.2.° Зобразіть площину γ, яка проходить через пряму a. Запишіть це за допомогою відповідних символів.

1.3.° Зобразіть площину α і пряму b, яка перетинає дану площину в точці A. Запишіть це за допомогою відповідних символів. Скільки точок прямої b належить площині α?

1.4.° Зобразіть площини β і γ, які перетинаються по прямій c. Запишіть це за допомогою відповідних символів.

1.5.° Пряма a проходить через точку A площини α. Чи випливає із цього, що пряма a перетинає площину α?

1.6.° Запишіть за допомогою символів взаємне розміщення точок, прямих і площини, зображених на рисунку 1.17.

1.7.° Дано точки A, B і C такі, що $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 7$ см. Скільки площин можна провести через точки A, B і C?

1.8.° Дано точки D, E і F такі, що $DE = 2$ см, $EF = 4$ см, $DF = 6$ см. Скільки площин можна провести через точки D, E і F?

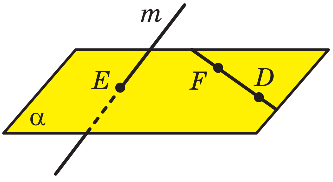


Рис. 1.17

1.9.° У кімнаті на люстрі сиділи три мухи. Одночасно вони почали літати: перша — кружляти навколо люстри на однаковій висоті, друга — спускатися від люстри вертикально вниз і підніматися вгору, третя — рухатися від люстри до ручки дверей та назад. Швидкість усіх мух однакова. Через який час усі три мухи опиняться в одній площині?

1.10.° Чи можуть дві площини мати тільки одну спільну точку?

1.11.° Зобразіть площини α і β, пряму c, точки A і B, якщо відомо, що $\alpha \cap \beta = c$, $A \in c$, $B \in \alpha$, $B \notin \beta$.

1.12.° Зобразіть площини α, β, γ і пряму m, якщо відомо, що $\alpha \cap \beta = m$, $\alpha \cap \gamma = m$.

1.13.° Зобразіть площини α, β, γ і прямі a, b, c, якщо відомо, що $\alpha \cap \beta = c$, $\alpha \cap \gamma = b$, $\beta \cap \gamma = a$.

1.14.• Пряма m — лінія перетину площин α і β (рис. 1.18). Точки A і B належать площині α, а точка C — площині β. Побудуйте лінії перетину площини ABC із площиною α і з площиною β.

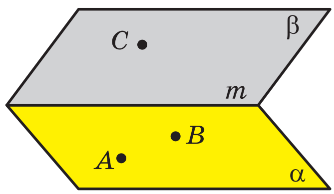


Рис. 1.18

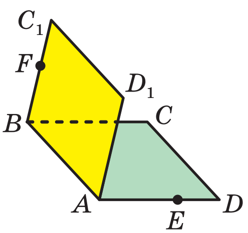


Рис. 1.19

1.15.• Квадрати $ABCD$ і ABC_1D_1 не лежать в одній площині (рис. 1.19). На відрізку AD позначили точку E, а на відрізку BC_1 — точку F. Побудуйте точку перетину:

1) прямої CE з площиною ABC_1;

2) прямої FD_1 із площиною ABC.

1.16.• Чи є правильним твердження: будь-яка пряма, що проходить через центри вписаного та описаного кіл даного трикутника, лежить у площині цього трикутника?

1.17.• Про площини α і β та пряму a відомо, що $\alpha \cap \beta = c$, $a \subset \alpha$, $a \cap \beta = M$. Доведіть, що $a \cap c = M$.

1.18.• Про площини α і β та пряму a відомо, що $\alpha \cap \beta = c$, $a \subset \alpha$, $a \cap c = A$. Доведіть, що $A \in \beta$.

1.19.• Точки A, B, C і D не лежать в одній площині. Доведіть, що жодні три з них не лежать на одній прямій.

1.20.• Доведіть, що коли дві сусідні вершини чотирикутника й точка перетину його діагоналей належать одній площині, то й дві інші вершини належать цій площині.

1.21.• Вершина D чотирикутника $ABCD$ належить площині α, а всі інші вершини лежать поза цією площиною. Продовження сторін BA і BC перетинають площину α в точках M і K відповідно. Доведіть, що точки M, D і K лежать на одній прямій.

1.22.• Вершина A трикутника ABC належить площині α, а вершини B і C лежать поза цією площиною. Продовження медіан BM і CN трикутника ABC перетинають площину α в точках K і E відповідно. Доведіть, що точки A, K і E лежать на одній прямій.

1.23.•• Про площини α, β і γ відомо, що $\alpha \cap \beta = c$, $\beta \cap \gamma = a$, $\alpha \cap \gamma = b$, $a \cap c = M$. Доведіть, що $M \in b$.

1.24.•• Точка M — спільна точка двох площин ABC і BCD. Знайдіть відрізок BC, якщо $BM = 4$ см, $MC = 7$ см.

1.25.•• Дано n точок, $n > 4$, кожні чотири з яких лежать в одній площині. Доведіть, що всі ці точки лежать в одній площині.

1.26.•• Точки M, N, K і P, які належать відповідно ланкам AB, BC, CD і DA замкненої ламаної $ABCD$, лежать у площині α. Чи можна стверджувати, що точки A, B, C і D також належать площині α?

1.27.* П'ять точок, що є серединами ланок замкненої ламаної $ABCDE$, належать площині α. Доведіть, що точки A, B, C, D і E належать цій самій площині.

1.28.* Маємо n площин, $n \geqslant 2$, кожні дві з яких перетинаються. Яка найбільша кількість прямих, що є лініями перетину даних площин, може при цьому утворитися?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1.29. У трикутнику ABC сторона AC дорівнює 30 см. Медіани AM і CN відповідно дорівнюють 39 см і 42 см. Знайдіть площу трикутника ABC.

1.30. Діагональ AC рівнобічної трапеції $ABCD$ ($AB = CD$) ділить кут BAD навпіл (рис. 1.20). Точка E — середина відрізка AB. Пряма, яка проходить через точку E паралельно основам трапеції, перетинає відрізок AC у точці K, а відрізок CD — у точці F. Знайдіть периметр трапеції $ABCD$, якщо $EK = 3$ см, $KF = 5$ см.

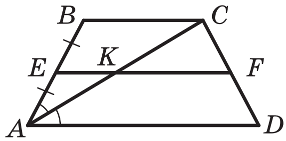


Рис. 1.20

2. Наслідки з аксіом стереометрії

У попередньому пункті ви ознайомилися з деякими аксіомами стереометрії. Крім аксіом, існують й інші наочно очевидні властивості, які описують взаємне розміщення точок, прямих і площин у просторі. Тепер, спираючись на аксіоми, ці властивості можна довести.

Теорема 2.1. ***Через пряму і точку, яка їй не належить, проходить площина, і до того ж тільки одна.***

Доведення. Нехай дано пряму a і точку A, яка не лежить на ній (рис. 2.1). Доведемо, що через пряму a і точку A проходить площина.

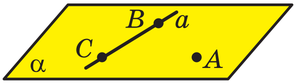


Рис. 2.1

Позначимо на прямій a дві довільні точки B і C. Точки A, B і C не лежать на одній прямій. Тоді за аксіомою **А3** через точки A, B і C проходить деяка площина α. Дві точки B і C прямої a належать площині α. Тоді за аксіомою **А4** площині α належить і пряма a. Отже, через пряму a і точку A проходить площина α.

Доведемо, що α — єдина площина, яка проходить через пряму a і точку A. Припустимо, що існує ще одна площина β така, що $a \subset \beta$ і $A \in \beta$. Площина β проходить через точки A, B і C. Таким чином, через точки A, B і C, які не лежать на одній прямій, проходять дві площини α і β, що суперечить аксіомі **А3**. Отже, наше припущення хибне, і площина α є єдиною площиною, яка проходить через пряму a і точку A. ◄

Так само, як і в планіметрії, дві прямі в просторі називають такими, що **перетинаються**, якщо вони мають спільну точку.

Задача. Доведіть, що прямі, які перетинаються, мають тільки одну спільну точку.

Розв'язання. Нехай прямі a і b, що перетинаються, мають дві спільні точки A і B. Розглянемо довільну площину α, яка проходить через точки A і B. Тоді за аксіомою **А4** площині α належать прямі a і b. Отже, отримали, що в площині α дві прямі мають дві спільні точки, що суперечить відповідній аксіомі планіметрії. ◄

Теорема 2.2. ***Через дві прямі, які перетинаються, проходить площина, і до того ж тільки одна.***

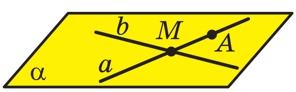


Рис. 2.2

Доведення. Нехай дано дві прямі a і b, які перетинаються в точці M (рис. 2.2).

Доведемо, що через прямі a і b проходить площина.

Позначимо на прямій a точку A, відмінну від точки M. Точка A не належить прямій b, оскільки у прямих a і b тільки одна спільна точка M. Тоді за теоремою 2.1 через точку A та пряму b проходить деяка площина α. Дві точки M і A прямої a належать площині α. Тоді за аксіомою **А4** пряма a також належить площині α. Отже, через прямі a і b проходить площина α.

Доведемо, що α — єдина площина, яка проходить через прямі a і b. Припустимо, що існує ще одна площина β така, що $a \subset \beta$ і $b \subset \beta$. Площина β проходить через пряму b і точку A. Таким чином, через пряму b і точку A, яка не лежить на ній, проходять дві площини α і β, що суперечить теоремі 2.1. Отже, наше припущення хибне, і площина α є єдиною площиною, яка проходить через прямі a і b. ◀

З аксіоми **А3** і теорем 2.1 і 2.2 випливає, що *площина однозначно визначається*:

1) *трьома точками, що не лежать на одній прямій*;
2) *прямою і точкою, яка не належить цій прямій;*
3) *двома прямими, що перетинаються.*

Таким чином, ми вказали три способи задання площини.

?

1. Які наслідки з аксіом стереометрії ви знаєте?
2. Укажіть способи однозначного задання площини.

ВПРАВИ

2.1.° Скільки площин можна провести через дані пряму та точку?

2.2.° Доведіть, що через три точки, які лежать на одній прямій, можна провести площину. Скільки можна провести таких площин?

2.3.° Прямі AB і CD перетинаються. Доведіть, що прямі AC і BD лежать в одній площині.

2.4.° Центр O і хорда AB кола лежать у деякій площині. Чи можна стверджувати, що в цій площині лежить будь-яка точка даного кола?

2.5.° Сторона AC і центр O описаного кола трикутника ABC лежать у площині α. Чи можна стверджувати, що в цій площині лежить вершина B?

2.6.° Прямі a і b перетинаються. Чи всі прямі, які перетинають прямі a і b, лежать в одній площині?

2.7.° Дано пряму *a* і точку *A* поза нею. Доведіть, що всі прямі, які проходять через точку *A* та перетинають пряму *a*, лежать в одній площині.

2.8.° Прямі *m* і *n* перетинаються в точці *A*. Точка *B* належить прямій *m*, точка *C* — прямій *n*, точка *D* — прямій *BC*. Доведіть, що прямі *m* і *n* та точка *D* лежать в одній площині.

2.9.° Прямі *AB* і *AC* перетинають площину α в точках *B* і *C*, точки *D* і *E* належать цій площині (рис. 2.3). Побудуйте точку перетину прямої *DE* з площиною *ABC*.

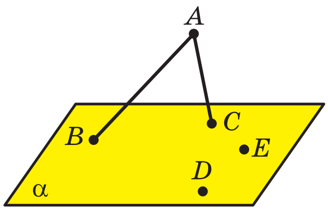


Рис. 2.3

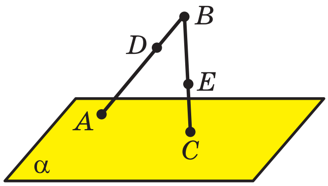


Рис. 2.4

2.10.° Пряма *BA* перетинає площину α в точці *A*, пряма *BC* — у точці *C* (рис. 2.4). На відрізку *AB* позначили точку *D*, на відрізку *BC* — точку *E*. Побудуйте точку перетину прямої *DE* з площиною α.

2.11.• Дано п'ять точок, які не лежать в одній площині. Яка найбільша кількість із них може лежати на одній прямій?

2.12.• Три прямі перетинаються в одній точці. Через кожні дві із цих прямих проведено площину. Скільки всього площин проведено?

2.13.• Як за допомогою двох ниток столяр може перевірити, чи лежать кінці чотирьох ніжок стільця в одній площині?

2.14.• Знайдіть помилку на рисунку 2.5, якщо відомо, що вершина *D* чотирикутника *ABCD* лежить у площині α, вершини *A*, *B* і *C* не лежать у цій площині, пряма *AB* перетинає площину α в точці *E*, пряма *BC* — у точці *F*. Зробіть правильний рисунок.

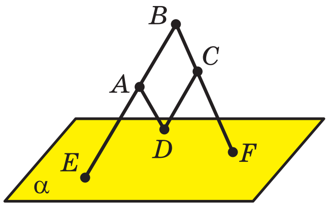


Рис. 2.5

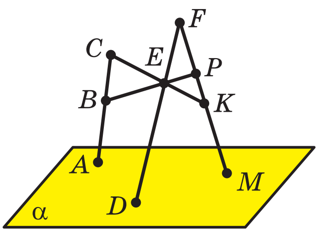


Рис. 2.6

2.15.° Знайдіть помилку на рисунку 2.6, якщо відомо, що прямі BP і CK перетинаються в точці E, пряма BP перетинає пряму AC у точці B, пряму FM — у точці P, пряма CK перетинає пряму FM у точці K, прямі AC, FE і FM перетинають площину α в точках A, D і M відповідно. Зробіть правильний рисунок.

2.16.• Точка C лежить на прямій AB, а точка D не лежить на цій прямій. Точка E лежить на прямій AD. Доведіть, що площини ABD і CDE збігаються.

2.17.• Доведіть, що коли три прямі не належать одній площині та кожні дві із цих прямих перетинаються, то всі дані прямі перетинаються в одній точці.

2.18.° Прямі a, b і c попарно перетинаються, причому точки їхнього перетину не збігаються. Чи лежать прямі a, b і c в одній площині?

2.19.• Точки M і N належать площині α, а точка K — площині β (рис. 2.7). Побудуйте пряму перетину площин β і MNK.

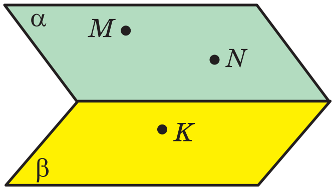


Рис. 2.7

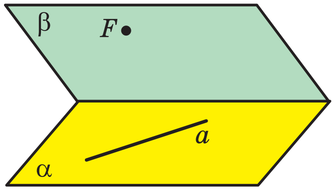


Рис. 2.8

2.20.° Пряма a належить площині α, а точка F — площині β (рис. 2.8). Побудуйте пряму, по якій площина, що проходить через пряму a та точку F, перетинає площину β.

2.21.•• Трикутники ABC і ABC_1 лежать у різних площинах. На сторонах AC, CB, BC_1 і C_1A позначили точки M, N, P і K відповідно так, як показано на рисунку 2.9. Чи можуть ці точки належати одній площині?

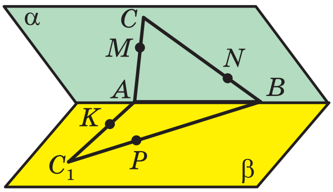


Рис. 2.9

2.22.•• Дано три площини, які попарно перетинаються. Дві з трьох прямих перетину цих площин перетинаються в точці A. Доведіть, що третя пряма проходить через точку A.

2.23.•• У чотирикутнику $ABCD$ сторони AB і CD непаралельні, X — довільна точка, яка не належить площині чотирикутника. Доведіть, що за будь-якого вибору точки X пряма перетину площин XAB і XCD проходить через деяку фіксовану точку.

2.24.* На рисунку 2.10 буквами P, E і Q позначено точки перетину прямих MK і BC, MN і CA, KN і AB відповідно. Чи можна стверджувати, що площини ABC і MNK збігаються?

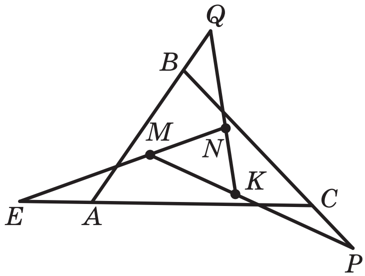


Рис. 2.10

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

2.25. На стороні BC паралелограма $ABCD$ позначили точку M. Знайдіть площу паралелограма $ABCD$, якщо площа трикутника AMD дорівнює 16 см^2.

2.26. Відрізки AB і CD перетинаються в точці E, прямі AD і BC паралельні. Знайдіть відрізок BE, якщо $AE = 10$ см, $CE = 3$ см, $DE = 6$ см.

3. Просторові фігури. Початкові відомості про многогранники

У стереометрії, крім точок, прямих і площин, розглядають просторові фігури, тобто фігури, не всі точки яких лежать в одній площині. З деякими з просторових фігур ви вже ознайомилися. Так, на рисунку 3.1 зображено циліндр, конус і кулю. Ці фігури ви докладно вивчатимете в 11 класі.

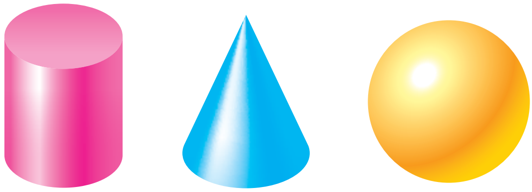


Рис. 3.1

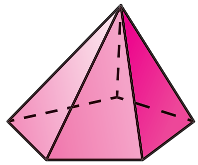


Рис. 3.2

На рисунку 3.2 зображено ще одну відому вам просторову фігуру — піраміду. Ця фігура є окремим видом **многогранника**.

Приклади многогранників показано на рисунку 3.3.

Рис. 3.3

Поверхня многогранника складається з многокутників. Їх називають **гранями многогранника**. Сторони многокутників називають **ребрами многогранника**, а вершини — **вершинами многогранника** (рис. 3.4).

На рисунку 3.5 зображено п'ятикутну піраміду *FABCDE*. Поверхня цього многогранника складається з п'яти трикутників, які називають **бічними гранями піраміди**, та одного п'ятикутника,

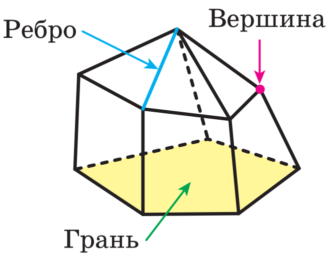


Рис. 3.4

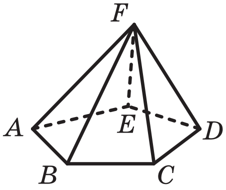


Рис. 3.5

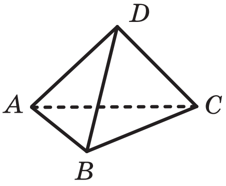


Рис. 3.6

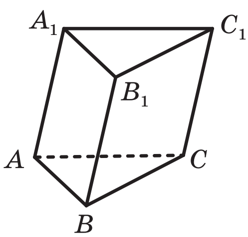


Рис. 3.7

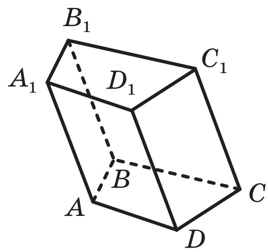


Рис. 3.8

який називають **основою піраміди.** Вершину F, яка є спільною для всіх бічних граней, називають **вершиною піраміди.** Ребра FA, FB, FC, FD і FE називають **бічними ребрами піраміди,** а ребра AB, BC, CD, DE і EA — **ребрами основи піраміди.**

На рисунку 3.6 зображено трикутну піраміду $DABC$. Трикутну піраміду також називають **тетраедром.**

Ще одним окремим видом многогранника є **призма.** На рисунку 3.7 зображено трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$. Цей многогранник має п'ять граней, дві з яких — рівні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$. Їх називають **основами призми.** Решта граней призми — паралелограми. Їх називають **бічними гранями призми.** Ребра AA_1, BB_1 і CC_1 називають **бічними ребрами призми.**

На рисунку 3.8 зображено чотирикутну призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Її поверхня складається з двох рівних чотирикутників $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ (основи призми) і чотирьох паралелограмів (бічні грані призми).

Окремим видом чотирикутної призми є **прямокутний паралелепіпед.** На рисунку 3.9 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Усі грані прямокутного паралелепіпеда є прямокутниками.

У свою чергу, окремим видом прямокутного паралелепіпеда є **куб.** Усі грані куба — рівні квадрати (рис. 3.10).

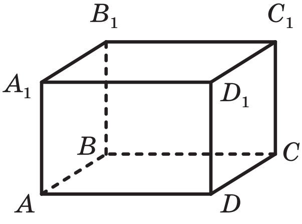


Рис. 3.9

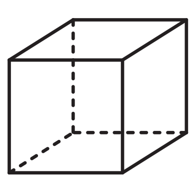


Рис. 3.10

Чотирикутну призму, основою якої є паралелограм, називають **паралелепіпедом.**

У курсі геометрії 11 класу ви докладніше ознайомитеся з многогранниками та їхніми окремими видами.

Задача 1. На ребрах AA_1 і DD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначено відповідно точки M і N так, що $AM \neq DN$ (рис. 3.11). Побудуйте точку перетину прямої MN із площиною ABC.

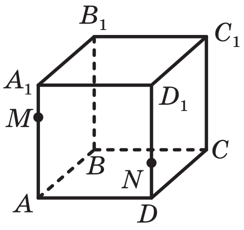


Рис. 3.11

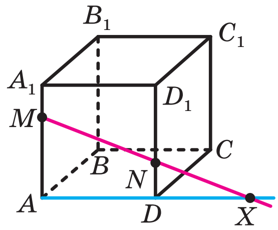


Рис. 3.12

Розв'язання. Точки M і N належать площині AA_1D_1. Тоді за аксіомою **A4** пряма MN належить цій площині. Аналогічно пряма AD також належить площині AA_1D_1. Із планіметрії відомо, що прямі, які лежать в одній площині, або є паралельними, або перетинаються. Оскільки $AM \neq DN$, то прямі AD і MN перетинаються. Нехай X — точка їхнього перетину (рис. 3.12).

Точки A і D належать площині ABC. Тоді за аксіомою **A4** пряма AD належить цій самій площині. Точка X належить прямій AD. Отже, точка X належить площині ABC. Оскільки точка X також належить прямій MN, то пряма MN перетинає площину ABC у точці X. ◄

Нехай у просторі задано многогранник і площину.

Якщо всі спільні точки многогранника та площини утворюють многокутник, то цей многокутник називають **перерізом многогранника площиною**, а саму площину — **січною площиною**.

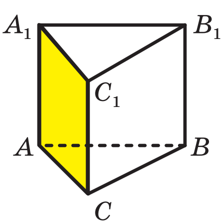


Рис. 3.13

На рисунку 3.13 січну площину задають точки A, A_1 і C_1. Перерізом призми цією площиною є бічна грань AA_1C_1C.

На рисунку 3.14 січну площину задають пряма AC і точка B_1. Перерізом призми цією площиною є трикутник AB_1C.

На рисунку 3.15 січну площину задають дві прямі AE і CE, що перетинаються. Перерізом піраміди цією площиною є трикутник AEC.

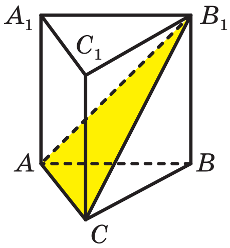


Рис. 3.14

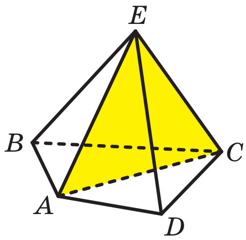


Рис. 3.15

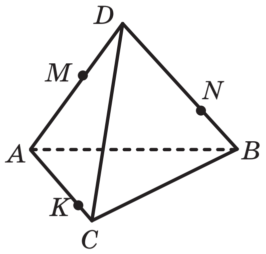


Рис. 3.16

Задача 2. На ребрах AD, DB і AC тетраедра $DABC$ позначено відповідно точки M, N і K (рис. 3.16). Побудуйте переріз тетраедра площиною KMN, якщо відрізок MN не паралельний ребру AB.

Розв'язання. Точки M і N є спільними для площини KMN і площини ADB. Отже, ці площини перетинаються по прямій MN. Тоді січна площина перетинає грань ADB по відрізку MN (рис. 3.17). Аналогічно робимо висновок, що площина KMN перетинає грань ADC по відрізку KM.

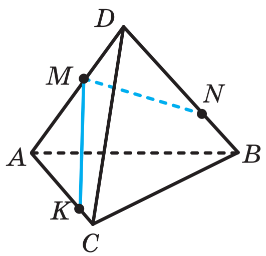


Рис. 3.17

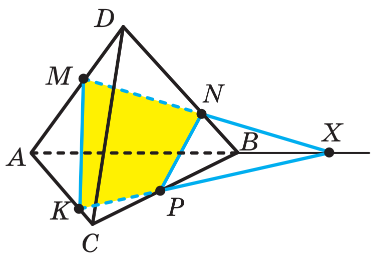


Рис. 3.18

Січна площина KMN і площина ABC мають спільну точку K. Отже, вони перетинаються по прямій, яка проходить через точку K. Щоби побудувати цю пряму, треба знайти ще одну спільну точку площин ABC і KMN. Для цього знайдемо точку перетину прямої MN і площини ABC.

Нехай пряма MN перетинає пряму AB у точці X (рис. 3.18). Оскільки $AB \subset ABC$, то $X \in ABC$. Оскільки $MN \subset KMN$, то $X \in KMN$. Отже, точки K і X є спільними для площин ABC і KMN. Таким чином, ці площини перетинаються по прямій KX.

Нехай пряма KX перетинає відрізок CB у точці P. Тоді січна площина перетинає грані ABC і CDB відповідно по відрізках KP і PN.

Отже, чотирикутник $KMNP$ — шуканий переріз. ◀

Задача 3. Точка M належить бічному ребру BB_1 трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$. Пряма a належить площині ABC і розміщена так, як показано на рисунку 3.19. Побудуйте переріз призми площиною, яка проходить через пряму a і точку M.

Розв'язання. Нехай пряма AB перетинає пряму a в точці X (рис. 3.20). Точки M і X є спільними для січної площини та площини AA_1B_1. Отже, ці площини перетинаються по прямій MX. Нехай пряма MX перетинає ребро AA_1 у точці K. Тоді січна площина перетинає бічну грань AA_1B_1B по відрізку KM.

Аналогічно будуємо відрізок MN, по якому січна площина перетинає грань CC_1B_1B.

Для завершення розв'язання залишилося сполучити точки N і K. Трикутник KMN — шуканий переріз. ◀

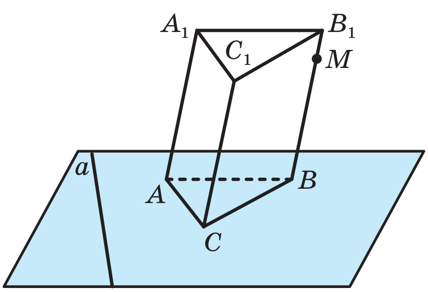


Рис. 3.19

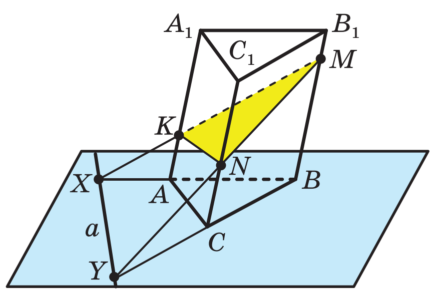


Рис. 3.20

Задача 4. На ребрах AD, DD_1 і B_1C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначено відповідно точки M, N і K (рис. 3.21). Побудуйте переріз куба площиною MNK.

Розв'язання. Очевидно, що січна площина перетинає грань AA_1D_1D куба по відрізку MN (рис. 3.22).

Нехай $MN \cap A_1D_1 = X$. Точки X і K є спільними для площин MNK і $A_1D_1C_1$. Отже, $MNK \cap A_1D_1C_1 = XK$. Нехай пряма XK перетинає ребро D_1C_1 у точці E. Тоді площина MNK перетинає грань $A_1B_1C_1D_1$ по відрізку EK.

Нехай $MN \cap AA_1 = Z$ і $EK \cap A_1B_1 = Y$. Тоді $MNK \cap AA_1B_1 = YZ$. Нехай пряма YZ перетинає ребра AB і A_1B_1 куба відповідно в точках G і F. Залишилося сполучити точки M і G, G і F, F і K. Шестикутник $MNEKFG$ — шуканий переріз. ◀

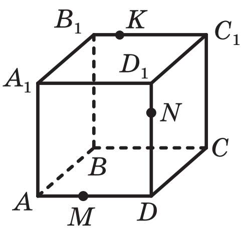


Рис. 3.21

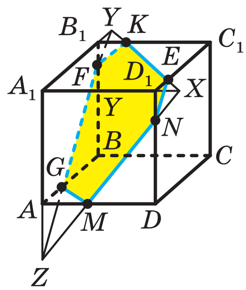


Рис. 3.22

Задача 5. Точка X є серединою ребра AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. У якому відношенні площина XCD_1 ділить ребро AB?

Розв'язання. Знайдемо точку перетину площини XCD_1 і прямої AB (рис. 3.23). Нехай пряма D_1X перетинає пряму DA в точці Y. Трикутник YAX подібний трикутнику YDD_1 (рис. 3.24), тому $\frac{YA}{YD} = \frac{AX}{DD_1} = \frac{1}{2}$. Оскільки точки Y і C належать площині перерізу, то й пряма YC також лежить у площині перерізу. Нехай пряма YC перетинає пряму AB у точці Z. Точка Z належить площині перерізу та прямій AB, тому точка Z є точкою перетину площини XCD_1 і прямої AB. Оскільки трикутник YAZ подібний трикутнику YDC (рис. 3.25), то $\frac{YA}{YD} = \frac{AZ}{DC} = \frac{1}{2}$. Звідси випливає, що точка Z є серединою сторони AB, тобто площина XCD_1 ділить ребро AB навпіл. ◀

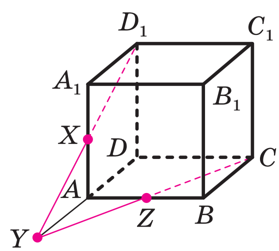


Рис. 3.23

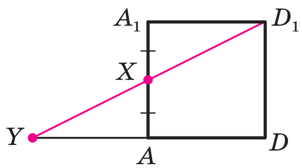


Рис. 3.24

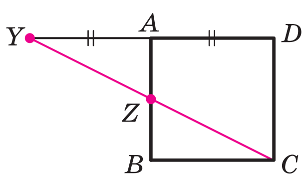


Рис. 3.25

Задача 6. На ребрах SA, SB і SC трикутної піраміди $SABC$ позначили відповідно точки A_1, B_1 і C_1. Відомо, що прямі AB і A_1B_1 перетинаються в точці X, прямі BC і B_1C_1 — у точці Y, а прямі AC і A_1C_1 — у точці Z. Доведіть, що точки X, Y і Z лежать на одній прямій.

Розв'язання. Розглянемо площини ABC і $A_1B_1C_1$ (рис. 3.26). Оскільки точка X належить прямій A_1B_1, то точка X належить і площині $A_1B_1C_1$. Крім того, точка X належить прямій AB, а отже, належить площині ABC. Таким чином, точка X належить прямій перетину площин $A_1B_1C_1$ і ABC. Аналогічно можна довести, що точки Y і Z також належать прямій перетину площин $A_1B_1C_1$ і ABC. Отже, точки X, Y і Z лежать на одній прямій. ◄

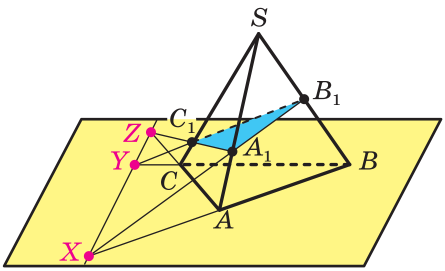


Рис. 3.26

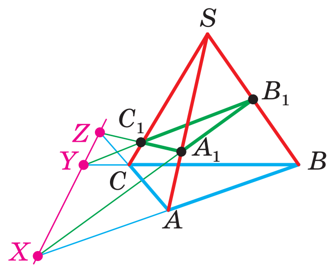


Рис. 3.27

Задача 6 пов'язана з важливою теоремою (теоремою Дезарга) розділу математики, який називають проективною геометрією. Якщо в шкільному курсі геометрії одними з головних об'єктів вивчення є величини (довжини відрізків, міри кутів, площі многокутників тощо), то в проективній геометрії головними «дійовими особами» є прямі та точки їхнього перетину. Характерним прикладом твердження проективної геометрії є теорема Дезарга.

Теорема Дезарга. ***Якщо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ розміщені на площині так, що прямі AA_1, BB_1 і CC_1 перетинаються в одній точці, то точки перетину прямих AB і A_1B_1, BC і B_1C_1, AC і A_1C_1 належать одній прямій.***

Жерар Дезарг
(1593–1662)

Французький математик,
архітектор, військовий інженер.
Заклав основи проективної
та нарисної геометрій.

Семен Петрович Ярошенко
(1846–1917)

Український математик, народився в м. Херсоні. Його робота «Начала новой геометрии» (1873) – перша вітчизняна книга з проективної геометрії.

Зверніть увагу, що коли на рисунок 3.26 подивитися як на планіметричний (рис. 3.27), то він буде ілюстрацією теореми Дезарга.

Докладніше про інтерпретації такого роду розповімо в п. 8.

?

1. Назвіть просторові фігури, які вам відомі.
2. З яких фігур складається поверхня многогранника? Як їх називають?
3. Що називають ребрами многогранника? вершинами многогранника?
4. Які види многогранників ви знаєте? Опишіть ці многогранники.

ВПРАВИ

3.1.° На рисунку 3.28 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажіть:
1) основи паралелепіпеда;
2) бічні грані паралелепіпеда;
3) бічні ребра паралелепіпеда;
4) ребра нижньої основи паралелепіпеда;
5) ребра, паралельні ребру AB;
6) ребра, паралельні ребру BB_1.

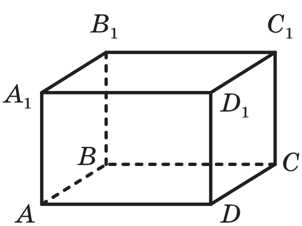


Рис. 3.28

3.2.° На рисунку 3.29 зображено піраміду $MABC$. Укажіть:
1) основу піраміди;
2) вершину піраміди;
3) бічні грані піраміди;
4) бічні ребра піраміди;
5) ребра основи піраміди.

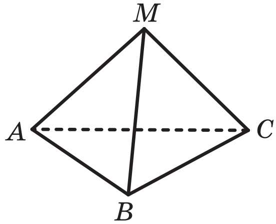


Рис. 3.29

3.3.° На ребрі BC тетраедра $SABC$ позначили точку D. Яка пряма є лінією перетину площин: 1) ASD і ABC; 2) ASD і BSC; 3) ASD і ASC? Побудуйте переріз тетраедра площиною ASD.

3.4.° Точка M належить грані ASC тетраедра $SABC$, точка D — ребру BC (рис. 3.30). Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через пряму SD і точку M.

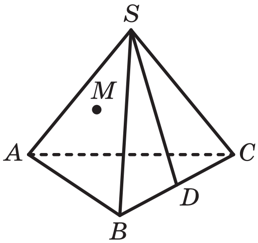


Рис. 3.30

3.5.° На бічних ребрах SA і SB піраміди $SABCD$ позначили відповідно точки M і K. Побудуйте точку перетину прямої MK із площиною ABC, якщо прямі MK і AB не є паралельними.

3.6.° На бічних ребрах SA і SC піраміди $SABCD$ позначили відповідно точки M і K. Побудуйте точку перетину прямої MK із площиною ABC, якщо прямі MK і AC не є паралельними.

3.7.° Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через: 1) точки A, C і B_1; 2) пряму BD і точку C_1.

3.8.° Побудуйте переріз призми $ABCA_1B_1C_1$ площиною, яка проходить через прямі AC_1 і BC_1.

3.9.• Дано призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 3.31). Точка E належить прямій A_1B_1, точка F — прямій BB_1, точка M — прямій B_1C_1. Побудуйте переріз призми площиною EFM.

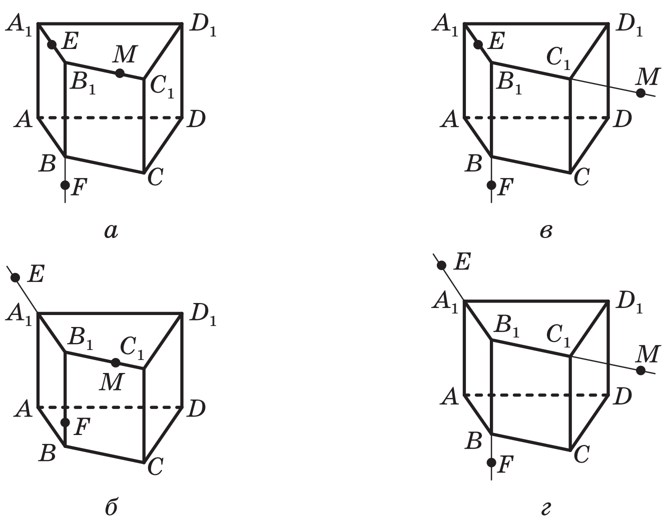


Рис. 3.31

3.10.• Дано призму $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 3.32). Точка D належить прямій AC, точка E — ребру BC. Побудуйте переріз призми площиною DEC_1.

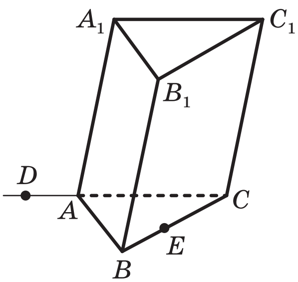


Рис. 3.32

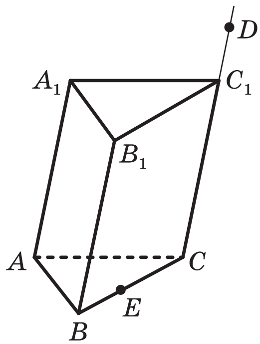


Рис. 3.33

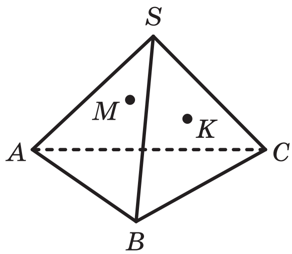


Рис. 3.34

3.11.• Дано призму $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 3.33). Точка D належить прямій CC_1, точка E — ребру BC. Побудуйте переріз призми площиною AED.

3.12.• Точка M належить грані ASB тетраедра $SABC$, точка K — грані BSC (рис. 3.34). Побудуйте точку перетину прямої MK із площиною ABC.

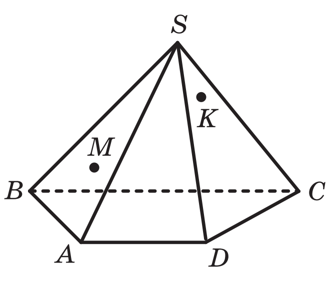


Рис. 3.35

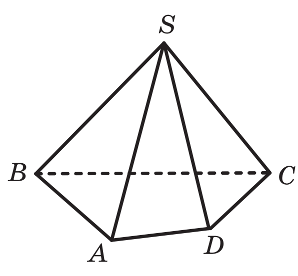


Рис. 3.36

3.13.• Точка M належить грані ASB піраміди $SABCD$, точка K — грані CSD (рис. 3.35). Побудуйте точку перетину прямої MK із площиною ABC.

3.14.• Дано піраміду $SABCD$ (рис. 3.36). Побудуйте лінію перетину площин ASB і CSD.

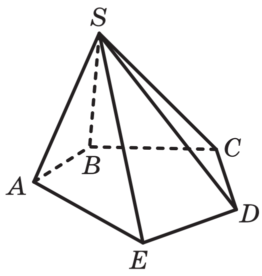


Рис. 3.37

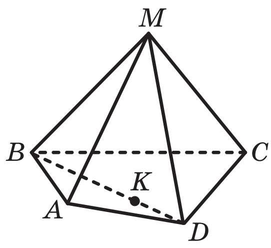


Рис. 3.38

3.15.$^{\bullet}$ Дано піраміду $SABCDE$ (рис. 3.37). Побудуйте лінію перетину площин ASE і BSC.

3.16.$^{\bullet}$ На ребрах AB і CD тетраедра $DABC$ позначили відповідно точки E і F. Побудуйте лінію перетину площин AFB і CED.

3.17.$^{\bullet}$ Дано піраміду $MABCD$, точка K належить відрізку BD (рис. 3.38). Побудуйте лінію перетину площин MCK і MAB.

3.18.$^{\bullet}$ На ребрах AD і CD піраміди $SABCD$ позначили відповідно точки M і K (рис. 3.39). Побудуйте лінію перетину площин BSC і MSK.

3.19.$^{\bullet\bullet}$ На ребрах AB, AD і CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначено відповідно точки E, F і M (рис. 3.40). Побудуйте переріз куба площиною EFM.

3.20.$^{\bullet\bullet}$ На ребрах AA_1 і CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначено відповідно точки E і F (рис. 3.41). Побудуйте переріз куба площиною EB_1F.

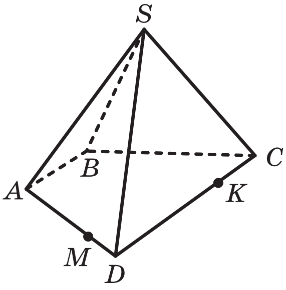


Рис. 3.39

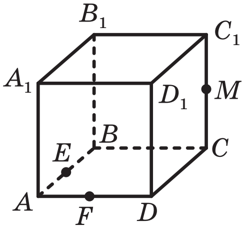


Рис. 3.40

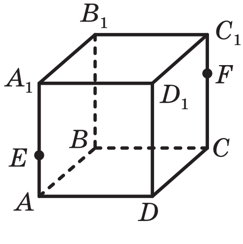


Рис. 3.41

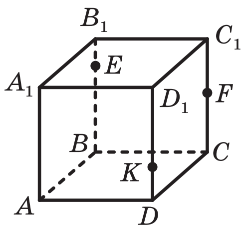


Рис. 3.42

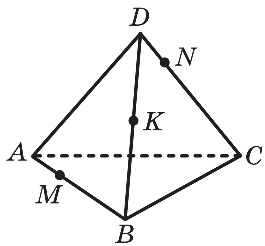


Рис. 3.43

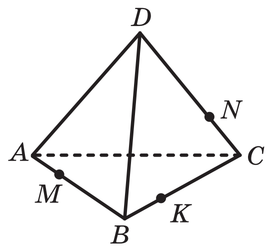


Рис. 3.44

3.21.•• На ребрах BB_1, CC_1 і DD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначено відповідно точки E, F і K (рис. 3.42). Побудуйте переріз куба площиною EFK.

3.22.•• На ребрах AB, BD і CD тетраедра $DABC$ позначено відповідно точки M, K і N (рис. 3.43). Побудуйте переріз тетраедра площиною MNK.

3.23.•• На ребрах AB, BC і CD тетраедра $DABC$ позначено відповідно точки M, K і N (рис. 3.44). Побудуйте переріз тетраедра площиною MNK.

3.24.•• На ребрах AC і BD тетраедра $DABC$ позначили відповідно точки E і F, а на ребрі CD — точки M і K так, що точка K лежить між точками C і M (рис. 3.45). Побудуйте лінію перетину площин ABM і EFK.

3.25.•• На бічних ребрах MB і MC піраміди $MABCD$ позначили відповідно точки E і F (рис. 3.46). Побудуйте лінію перетину площин AEC і BDF.

3.26.•• На ребрах AA_1 і A_1B_1 призми $ABCA_1B_1C_1$ позначено точки D і E відповідно (рис. 3.47). Побудуйте переріз призми площиною CDE.

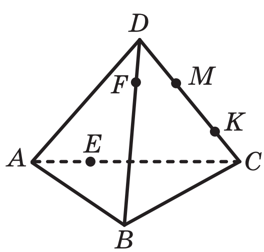


Рис. 3.45

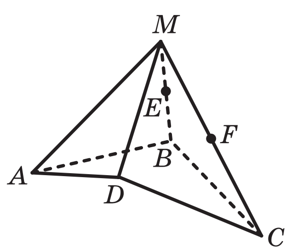


Рис. 3.46

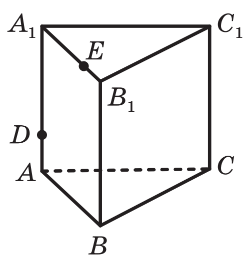


Рис. 3.47

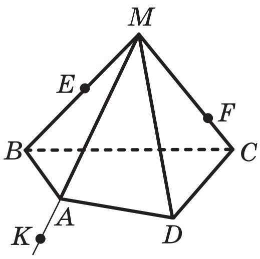


Рис. 3.48

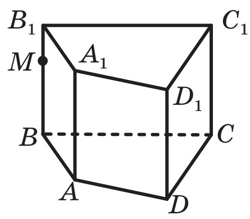


Рис. 3.49

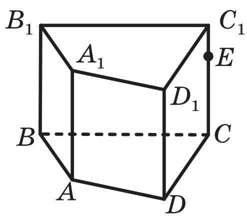


Рис. 3.50

3.27.•• Дано піраміду $MABCD$ (рис. 3.48). На бічних ребрах MB і MC позначили відповідно точки E і F, а на продовженні ребра MA за точку A — точку K. Побудуйте переріз піраміди площиною EFK.

3.28.•• На бічному ребрі BB_1 призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначено точку M (рис. 3.49). Побудуйте переріз призми площиною CMD.

3.29.•• На ребрі CC_1 призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначено точку E (рис. 3.50). Побудуйте переріз призми площиною BA_1E.

3.30.•• Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Позначте на його ребрах три точки так, щоби переріз куба площиною, яка проходить через ці точки, був п'ятикутником.

3.31.•• Дано піраміду $MABCD$ (рис. 3.51). На ребрі AD позначили точку E, на грані AMB — точку F, на грані CMD — точку K. Побудуйте переріз піраміди площиною EFK.

3.32.•• Точка K належить ребру AC тетраедра $DABC$, точка E — грані ADB, точка F — грані BDC (рис. 3.52). Побудуйте переріз тетраедра площиною EFK.

3.33.•• На ребрах BC, CA і CD тетраедра $DABC$ позначили точки M, N і P відповідно (рис. 3.53). Побудуйте точку перетину площин ABP, ADM і BDN.

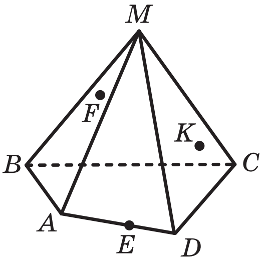


Рис. 3.51

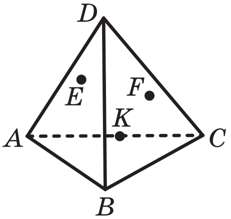


Рис. 3.52

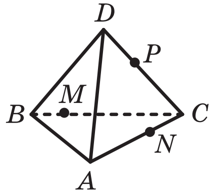


Рис. 3.53

3.34.•• На ребрах BC, CA і CD тетраедра $DABC$ позначили точки M, N і P відповідно (рис. 3.53). Побудуйте точку перетину площин BPN, AMP і MND.

3.35.* Чи можна стверджувати, що коли всі грані многогранника — рівні квадрати, то цей многогранник — куб?

3.36.* Точки M, N і K належать відповідно граням ADB, BDC і CDA тетраедра $DABC$ (рис. 3.54). Побудуйте переріз тетраедра площиною MNK.

3.37.* Точки F, M і K належать відповідно граням ASB, ABC і CSD піраміди $SABCD$ (рис. 3.55). Побудуйте переріз піраміди площиною FMK.

3.38.* Точки F, M і K належать відповідно граням ASB, ASD і DSC піраміди $SABCD$ (рис. 3.55). Побудуйте переріз піраміди площиною FMK.

3.39.* Чи може рисунок 3.56 бути зображенням деякого многогранника $ABCDA_1B_1C_1D_1$?

3.40.* Основою піраміди $SABCD$ є паралелограм $ABCD$. На ребрах SB, SC і SD позначили відповідно точки M, N і K так, що $SM : MB = 3 : 2$, $SN : NC = 1 : 2$ і $SK : KD = 1 : 3$.

1) Побудуйте переріз піраміди площиною MNK.
2) У якому відношенні, рахуючи від вершини S, площина MNK ділить ребро SA?

3.41.* Основою піраміди $SABCD$ є паралелограм $ABCD$. На ребрах SA і SC позначили відповідно точки K і N так, що $SK : KA = 1 : 3$, $SN : NC = 1 : 2$. На продовженні ребра BC за точку C позначили точку M так, що $BC = CM$.

1) Побудуйте переріз піраміди площиною MNK.
2) У якому відношенні, рахуючи від вершини S, площина MNK ділить ребро SD?

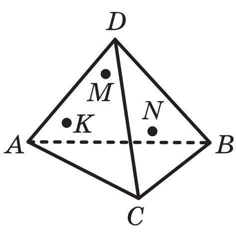


Рис. 3.54

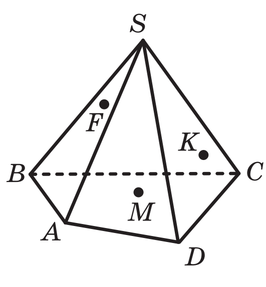


Рис. 3.55

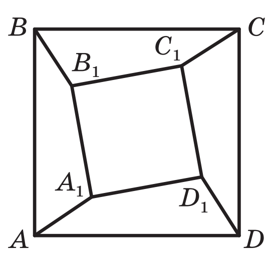


Рис. 3.56

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

3.42. Діагональ рівнобічної трапеції розбиває її на два рівнобедрених трикутники. Знайдіть кути трапеції.

3.43. Через точку перетину медіан трикутника ABC паралельно стороні AC проведено пряму, яка перетинає сторони AB і BC у точках E і F відповідно. Знайдіть відношення площі трикутника EBF до площі трикутника ABC.

ПРО АКСІОМИ

Вам не раз доводилося чути такі твердження: математика — строга наука, математика любить точність у міркуваннях, математика підпорядковується логіці тощо. Із завданнями на кшталт «доведіть», «обґрунтуйте», «роз'ясніть» ви стикаєтеся на кожному уроці математики. Узагалі, математика базується виключно на доказових міркуваннях — це те, що відрізняє її від більшості інших наук.

Ви довели багато теорем планіметрії, чимала «доказова робота» чекає на вас і в стереометрії. Вивчення геометричних фігур за принципом «нове зі старого» спонукало нас до необхідності введення основних понять і аксіом. Проте, незважаючи на все сказане, шкільний курс геометрії не є строгим. Нехай цей факт вас не засмучує. Навпаки, якщо ви зрозумієте причини відхилення від строгості, то це допоможе краще зрозуміти, як математики діляться своїми знаннями, роблячи їх більш образними та доступними.

Річ у тім, що в шкільному курсі геометрії під час доведення цілої низки теорем ми не лише користуємося чисто логічними міркуваннями, але й спираємося на очевидну наочність. Наприклад, навряд чи хтось із вас має сумніви в тому, що будь-який промінь, початок якого лежить усередині кола, перетинає це коло (рис. 3.57). Наведене істинне твердження в нашому курсі не є аксіомою, а отже, потребує доведення. Однак таке доведення ми не зможемо провести. Причина полягає в тому, що для доведення деяких фактів нам не вистачає аксіом, і цей недолік ми вимушені

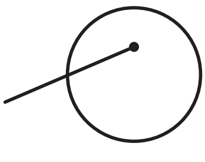


Рис. 3.57

компенсувати наочністю. Такий підхід обумовлений лише навчальними цілями. Річ у тім, що наочні пояснення та ілюстрації часто передають сутність сказаного значно швидше й роблять матеріал доступнішим.

Створити систему аксіом, яка дає змогу відмовитися від наочності та проводити доведення, базуючись лише на логічних міркуваннях, — задача непроста. Реалізовуючи ідеї великого давньогрецького філософа Аристотеля (384–322 до н. е.), Евклід (III ст. до н. е.) у своїй праці «Начала» першим спробував застосувати аксіоматичний метод для побудови геометрії. Завершив цю роботу в 1899 р. видатний німецький математик Давид Гільберт (1862–1943). Понад 2000 років список аксіом, створений Евклідом, доповнювався та уточнювався. Отриману систему аксіом називають аксіоматикою евклідової геометрії. Саме евклідову геометрію вивчають у школі.

Можна побудувати різні аксіоматики евклідової геометрії. Наприклад, у нашому курсі твердження «Через будь-які три точки простору, що не належать одній прямій, проходить площина, і до того ж тільки одна» є аксіомою, а твердження «Через дві прямі, що перетинаються, проходить площина, і до того ж тільки одна» — теоремою. Проте можна друге твердження прийняти за аксіому, тоді перше стане теоремою. Цю теорему ви можете легко довести, спираючись на «нову» та «старі» аксіоми. Переконайтеся в цьому самостійно.

Нові аксіоматики евклідової геометрії з'являються не лише в результаті «перестановки» аксіоми та наслідку з неї. Так, можна змінити список основних понять. Наприклад, замість прямої вважати поняттям, якому не дають означення, відрізок. Оскільки аксіоми розкривають сутність основних понять (описують їхні властивості), то, вибравши новий список основних понять, ми неминуче прийдемо до нової системи аксіом.

Наголосимо, що, користуючись різними системами аксіом евклідової геометрії, можна довести одні й ті самі властивості геометричних фігур. Системи аксіом фактично є різними наборами інструментів. Учені, які вивчають математику, добираючи доречний комплект аксіом, зводять будівлю геометричної науки.

Евклідова геометрія створювалась як наука, що описує навколишній світ. Проте систему аксіом можна змінити так, що вона вже не відображатиме звичні для нас властивості реальних предметів. Для цього можна одну з аксіом замінити на твердження, що її спростовує. Наприклад, аксіому «Через точку, яка не належить даній прямій, проходить не більше ніж одна пряма, паралельна даній» замінити такою аксіомою: «Через точку, яка не належить

М. І. Лобачевський
(1792–1856)

даній прямій, проходить більше ніж одна пряма, паралельна даній». Так зробив видатний російський математик Микола Іванович Лобачевський, тим самим побудувавши зовсім нову геометрію, відмінну від евклідової. Якщо ви виберете професію математика, то зможете ознайомитися з геометрією Лобачевського та з іншими неевклідовими геометріями.

Під час розгляду списку аксіом може виникнути запитання: «Чи не закралася до цього списку теорема, тобто твердження, яке можна довести за допомогою інших аксіом?» Таке можливе. Разом з тим за допомогою логічних виведень з істинного твердження можна отримати тільки істинне твердження. Отже, «потрапляння» теореми до списку аксіом не може призвести до суперечливих висновків.

Наприклад, у пункті 1 аксіому **А4** **«якщо дві точки прямої належать площині, то й уся пряма належить цій площині»** можна вивести з інших аксіом. Покажемо це.

Нехай $A \in \alpha$ і $B \in \alpha$ (рис. 3.58). Доведемо, що $AB \subset \alpha$.

З аксіоми **А1** випливає, що існує точка C, яка не належить площині α. Згідно з аксіомою **А3** існує площина β, яка проходить через точки A, B і C. Площини α і β мають спільну точку A. Тоді за аксіомою **А5** ці площини перетинаються по прямій, що проходить через точку A. Прямій перетину площин α і β належать усі їхні спільні точки. Отже, точка B належить цій прямій. Через точки A і B проходить єдина пряма, тому пряма AB збігається з прямою перетину площин α і β. Отже, $AB \subset \alpha$.

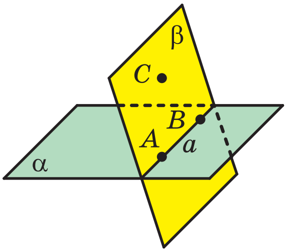


Рис. 3.58

Таким чином, у нашому курсі стереометрії можна було б залишити аксіоми **А1**, **А2**, **А3**, **А5** і **А6**. Проте, на наш погляд, це було б менш зручним і деякою мірою утруднило б викладення стереометрії.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 1

Основні аксіоми стереометрії

А1. Для будь-якої площини простору існує точка, яка їй не належить.

А2. У будь-якій площині простору виконуються всі аксіоми планіметрії.

А3. Через будь-які три точки простору, що не лежать на одній прямій, проходить площина, і до того ж тільки одна.

А4. Якщо дві точки прямої належать площині, то й уся пряма належить цій площині.

А5. Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій.

А6. Відстань між будь-якими двома точками простору є однаковою для будь-якої площини, що проходить через ці точки.

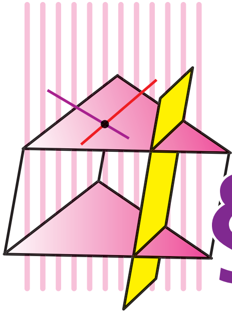
Площина однозначно визначається:

1) трьома точками, що не лежать на одній прямій;
2) прямою і точкою, яка не належить цій прямій;
3) двома прямими, що перетинаються.

Через дві прямі, які перетинаються, проходить площина, і до того ж тільки одна.

Переріз многогранника

Якщо всі спільні точки многогранника та площини утворюють многокутник, то цей многокутник називають перерізом многогранника площиною, а саму площину — січною площиною.



§ 2 ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ У ПРОСТОРІ

У цьому параграфі ви дізнаєтеся про взаємне розміщення двох прямих, прямої та площини, двох площин у просторі. Ознайомитеся з правилами, за якими зображають просторові фігури на площині. Отримаєте уявлення про перетворення фігур у просторі.

4. Взаємне розміщення двох прямих у просторі

Із курсу планіметрії ви знаєте, що дві прямі називають такими, що перетинаються, якщо вони мають тільки одну спільну точку. Таке саме означення прямих, що перетинаються, дають і в стереометрії (див. п. 2).

Вам відомо також, що дві прямі називають паралельними, якщо вони не перетинаються. Чи можна це означення перенести в стереометрію?

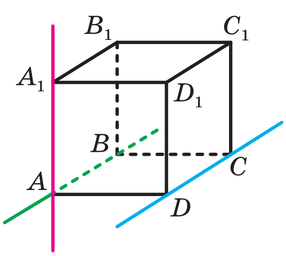


Рис. 4.1

Звернемося до рисунка 4.1, на якому зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Жодна з прямих AB і AA_1 не має з прямою DC спільних точок. При цьому прямі AB і DC лежать в одній площині — у площині ABC, а прямі AA_1 і DC не лежать в одній площині, тобто не існує площини, яка проходила б через ці прямі.

Наведений приклад показує, що в стереометрії для двох прямих, які не мають спільних точок, можливі два випадки взаємного розміщення: прямі лежать в одній площині та прямі не лежать в одній площині. Для кожного із цих випадків уведемо відповідне означення.

Означення. Дві прямі в просторі називають паралельними, якщо вони лежать в одній площині та не перетинаються.

Якщо прямі a і b паралельні, то записують: $a \parallel b$.

Означення. Дві прямі в просторі називають мимобіжними, якщо вони не лежать в одній площині.

Наприклад, на рисунку 4.1 прямі AB і DC — паралельні, а прямі AA_1 і DC — мимобіжні.

Наочне уявлення про паралельні прямі дають колони будівлі, корабельний ліс, колоди дерев'яного зрубу (рис. 4.2).

Міжнародний центр культури і мистецтв, м. Київ

Корабельний ліс

Дерев'яний зруб

Рис. 4.2

Наочне уявлення про мимобіжні прямі дають дроти ліній електропередачі, різні елементи будівельних конструкцій (рис. 4.3).

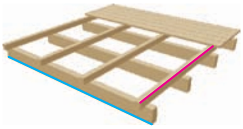


Рис. 4.3

Отже, існують три можливих випадки взаємного розміщення двох прямих у просторі:

1) прямі перетинаються;

2) прямі паралельні;

3) прямі мимобіжні.

Сказане ілюструє рисунок 4.4.

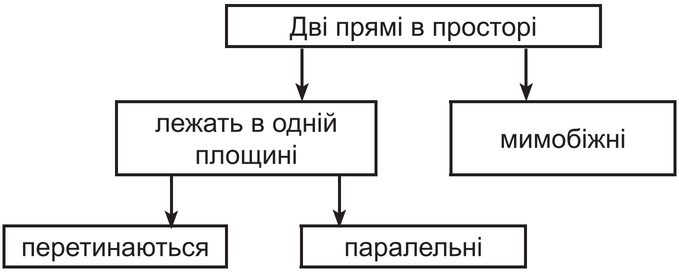


Рис. 4.4

Два відрізки називають **паралельними (мимобіжними)**, якщо вони лежать на паралельних (мимобіжних) прямих.

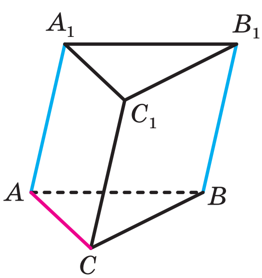


Рис. 4.5

Наприклад, ребра AA_1 і BB_1 трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 4.5) є паралельними, а ребра AC і BB_1 — мимобіжними.

Розглянемо деякі властивості паралельних прямих.

Теорема 4.1. ***Через дві паралельні прямі проходить площина, і до того ж тільки одна.***

Доведення. Нехай дано паралельні прямі a і b. Доведемо, що існує єдина площина α така, що $a \subset \alpha$ і $b \subset \alpha$.

Існування площини α, яка проходить через прямі a і b, випливає з означення паралельних прямих.

Якщо припустити, що існує ще одна площина, яка проходить через прямі a і b, то через пряму a і деяку точку прямої b проходитимуть дві різні площини, що суперечить теоремі 2.1. ◄

У п. 2 було вказано три способи задання площини. Теорему 4.1 можна розглядати як ще один спосіб задання площини — за допомогою двох паралельних прямих.

Нехай точка A не належить прямій a. Скільки існує прямих, які проходять через точку A та паралельні прямій a? У планіметрії відповідь на це запитання міститься в аксіомі паралельності прямих — існує єдина пряма, яка проходить через точку A та паралельна прямій a. У стереометрії це твердження також можна було б узяти за аксіому. Проте в нашому курсі вже накопичилося чимало змістовних фактів, які дають змогу вивести його як наслідок з інших істинних тверджень.

Теорема 4.2. ***Через точку в просторі, яка не належить даній прямій, проходить пряма, паралельна даній, і до того ж тільки одна.***

Доведення. Нехай дано пряму a і точку A такі, що $A \notin a$. Доведемо, що існує єдина пряма b така, що $b \parallel a$ і $A \in b$.

За теоремою 2.1 існує єдина площина α така, що $A \in \alpha$ і $a \subset \alpha$ (рис. 4.6).

За аксіомою **А2** у площині α виконується аксіома паралельності прямих. Тоді в площині α через точку A можна провести пряму, паралельну прямій a. На рисунку 4.6 це пряма b.

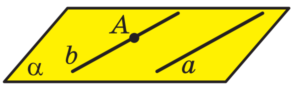


Рис. 4.6

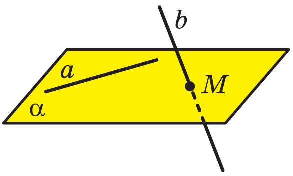


Рис. 4.7

Аксіома паралельності прямих гарантує, що в площині α така пряма b єдина. Проте сказане ще не означає, що в просторі немає інших прямих, які проходять через точку A та паралельні прямій a.

Нехай існує пряма b_1, яка не належить площині α, така, що $A \in b_1$ і $b_1 \parallel a$. Паралельні прямі b_1 і a задають деяку площину β. Площини α і β проходять через пряму a і точку A. Отже, за теоремою 2.1 ці площини збігаються. Звідси отримуємо, що $b_1 \subset \alpha$. Це суперечить зробленому припущенню.

Отже, пряма b — єдина пряма така, що $b \parallel a$ і $A \in b$. ◀

Установити паралельність двох прямих, які лежать в одній площині, можна за допомогою відомих вам з курсу планіметрії ознак паралельності двох прямих. А як установити, чи є дві прямі мимобіжними? Відповісти на це запитання дає змогу така теорема.

Теорема 4.3 (ознака мимобіжних прямих). ***Якщо одна з двох прямих лежить у площині, а друга перетинає цю площину в точці, яка не належить першій прямій, то дані прямі мимобіжні.***

Доведення. Нехай дано площину α та прямі a і b такі, що $a \subset \alpha$ і $b \cap \alpha = M$, причому $M \notin a$ (рис. 4.7). Доведемо, що прямі a і b мимобіжні.

Припустимо, що прямі a і b не є мимобіжними. Тоді вони належать деякій площині β. Площини α і β проходять через пряму a

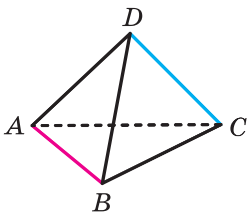


Рис. 4.8

і точку M, яка не належить прямій a. Тоді за теоремою 2.1 ці площини збігаються. Таким чином, $b \subset \alpha$, що суперечить умові $b \cap \alpha = M$. Отже, прямі a і b є мимобіжними. ◀

На рисунку 4.8 ребра AB і DC тетраедра $DABC$ є мимобіжними. Справді, пряма DC перетинає площину ABC у точці C, яка не належить прямій AB. Отже, за ознакою мимобіжних прямих прямі AB і DC є мимобіжними.

Задача 1. Доведіть, що коли одна з двох паралельних прямих перетинає площину, то й друга пряма також перетинає цю площину.

Розв'язання. Нехай дано прямі a і b та площину α такі, що $a \parallel b$, $a \cap \alpha = M$ (рис. 4.9). Доведемо, що пряма b перетинає площину α.

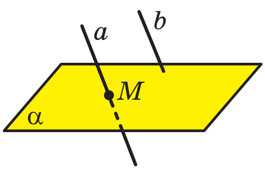


Рис. 4.9

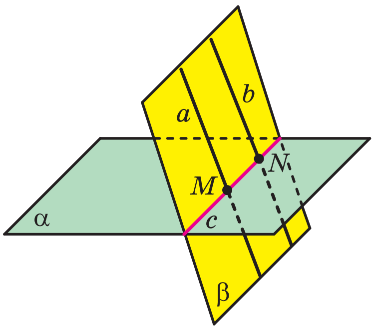


Рис. 4.10

За теоремою 4.1 через прямі a і b проходить єдина площина β. Оскільки $M \in \alpha$ і $M \in \beta$, то площини α і β перетинаються по прямій, яка проходить через точку M. Позначимо цю пряму c (рис. 4.10).

Із планіметрії відомо, що коли одна з двох паралельних прямих перетинає дану пряму, то й друга пряма перетинає дану пряму. Звідси випливає, що $b \cap c \neq \varnothing$.

Нехай $b \cap c = N$. Отже, пряма b і площина α мають спільну точку N. Якби пряма b належала площині α, то за теоремою 4.3 прямі a і b були б мимобіжними. Але $a \parallel b$. Таким чином, пряма b не належить площині α, а перетинає її в точці N. ◀

Задача 2. Доведіть, що всі паралельні прямі, які перетинають дану пряму, лежать в одній площині (рис. 4.11).

Розв'язання. Нехай a — одна з паралельних прямих, які перетинають дану пряму m. За теоремою 2.2 через прямі a і m, що перетинаються, проходить єдина площина α (рис. 4.12). Доведемо, що будь-яка пряма, що паралельна прямій a та перетинає пряму m, лежить у площині α.

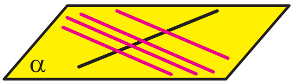


Рис. 4.11

Рис. 4.12

Розглянемо пряму b, яка паралельна прямій a та перетинає пряму m у деякій точці M (рис. 4.12). Припустимо, що пряма b не належить площині α. Оскільки точка M не належить прямій a, то за ознакою мимобіжних прямих прямі b і a є мимобіжними, що суперечить умові $b \parallel a$. Отже, пряма b належить площині α. ◀

1. Які дві прямі в просторі називають паралельними?
2. Які дві прямі в просторі називають мимобіжними?
3. Які існують випадки розміщення прямих у просторі?
4. Які два відрізки називають паралельними? мимобіжними?
5. Сформулюйте теорему про площину, яку задають дві паралельні прямі.
6. Сформулюйте теорему про пряму, яка проходить через дану точку паралельно даній прямій.
7. Сформулюйте ознаку мимобіжних прямих.

ВПРАВИ

4.1.° Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 4.13). Назвіть його ребра:
1) паралельні ребру CD;
2) мимобіжні з ребром CD.

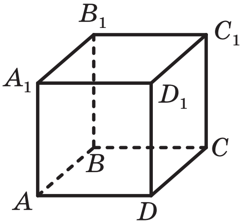


Рис. 4.13

4.2.° Укажіть моделі мимобіжних прямих, використовуючи предмети класної кімнати.

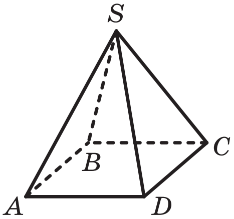


Рис. 4.14

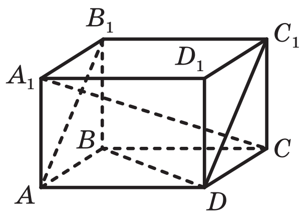


Рис. 4.15

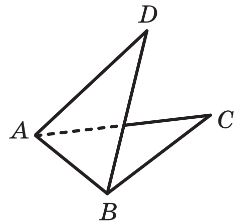


Рис. 4.16

4.3.° Дано піраміду $SABCD$ (рис. 4.14). Назвіть ребра піраміди, мимобіжні з ребром SA.

4.4.° Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 4.15). Укажіть взаємне розміщення прямих:

1) BC і A_1C; 3) BD і CC_1; 5) DC_1 і BB_1;
2) AB і C_1D_1; 4) AB_1 і DC_1; 6) AA_1 і CC_1.

4.5.° Чи є правильним твердження:

1) дві прямі, які не є паралельними, мають спільну точку;
2) дві прямі, які не є мимобіжними, лежать в одній площині;
3) дві прямі, які лежать в одній площині, перетинаються;
4) дві прямі є мимобіжними, якщо вони не перетинаються та не паралельні?

4.6.° Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 4.13). Доведіть, що прямі AA_1 і BC мимобіжні.

4.7.° Трикутники ABC і ADB лежать у різних площинах (рис. 4.16). Яким є взаємне розміщення прямих AD і BC? Відповідь обґрунтуйте.

4.8.° Через точку, що не лежить на прямій a, проведено дві прямі, які не мають спільних точок з прямою a. Доведіть, що хоча б одна із цих прямих і пряма a є мимобіжними.

4.9.° Прямі a і b мимобіжні. Точки A і B належать прямій a, точки C і D — прямій b. Яким є взаємне розміщення прямих AC і BD? Відповідь обґрунтуйте.

4.10.° Прямі a і b паралельні. Точки A і B належать прямій a, точки C і D — прямій b. Яким є взаємне розміщення прямих AC і BD? Відповідь обґрунтуйте.

4.11.• Яким може бути взаємне розміщення прямих b і c, якщо:

1) прямі a і b перетинаються, а прямі a і c паралельні;
2) прямі a і b паралельні, а прямі a і c мимобіжні?

4.12.• Скільки площин можуть задавати три попарно паралельні прямі? Зробіть рисунок.

4.13.° Скільки площин задають чотири попарно паралельні прямі, жодні три з яких не лежать в одній площині? Зробіть рисунок.

4.14.° Кінець A відрізка AB належить площині α. Через точку B і точку C, що належить відрізку AB, проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках B_1 і C_1 відповідно.

1) Доведіть, що точки A, B_1 і C_1 лежать на одній прямій.
2) Знайдіть відрізок BB_1, якщо точка C — середина відрізка AB і $CC_1 = 5$ см.
3) Знайдіть відрізок CC_1, якщо $AC : BC = 3 : 4$ і $BB_1 = 28$ см.

4.15.° Кінець C відрізка CD належить площині β. На відрізку CD позначили точку E так, що $CE = 6$ см, $DE = 9$ см. Через точки D і E провели паралельні прямі, які перетинають площину β у точках D_1 і E_1 відповідно. Знайдіть відрізок DD_1, якщо $EE_1 = 12$ см.

4.16.° На відрізку AB, який не перетинає площину α, позначили точку C так, що $AC = 4$ см, $BC = 8$ см. Через точки A, B і C провели паралельні прямі, які перетинають площину α в точках A_1, B_1 і C_1 відповідно.

1) Доведіть, що точки A_1, B_1 і C_1 лежать на одній прямій.
2) Знайдіть відрізок A_1C_1, якщо $B_1C_1 = 10$ см.

4.17.° Точка C — середина відрізка AB, який не перетинає площину β. Через точки A, B і C проведено паралельні прямі, які перетинають площину β у точках A_1, B_1 і C_1 відповідно. Знайдіть відрізок AA_1, якщо $BB_1 = 18$ см, $CC_1 = 15$ см.

4.18.° Прямі a, b і c перетинають площину α в точках A, B і C, які не лежать на одній прямій (рис. 4.17). Пряма b перетинає пряму a в точці D, а пряма c — у точці E. Доведіть, що прямі b і c мимобіжні.

4.19.° Відомо, що прямі a і b мимобіжні та прямі b і c мимобіжні. Чи можна стверджувати, що прямі a і c є мимобіжними?

4.20.° Для прямих на площині є правильним твердження: «Якщо пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає і другу пряму». Чи є правильним це твердження для прямих у просторі?

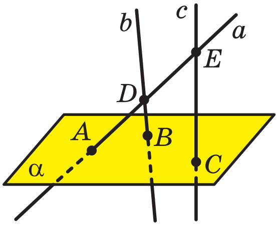


Рис. 4.17

4.21.• Точка M не належить жодній із мимобіжних прямих a і b. Чи можна через точку M провести дві прямі, кожна з яких перетинатиме і пряму a, і пряму b?

4.22.• Точка M не належить жодній із паралельних прямих a і b. Відомо, що через точку M можна провести пряму, яка перетинатиме кожну з прямих a і b. Доведіть, що прямі a і b та точка M лежать в одній площині.

4.23.• Через кінці відрізка AB, що перетинає площину α, і його середину C проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках A_1, B_1 і C_1 відповідно (рис. 4.18). Знайдіть відрізок CC_1, якщо $AA_1 = 16$ см, $BB_1 = 8$ см.

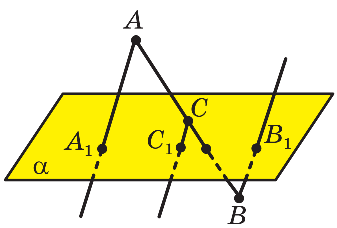


Рис. 4.18

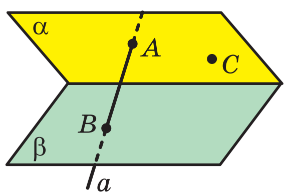


Рис. 4.19

4.24.• На відрізку AB, який перетинає площину α, позначили точку C так, що $AC : BC = 5 : 3$. Через точки A, B і C провели паралельні прямі, які перетинають площину α в точках A_1, B_1 і C_1 відповідно. Знайдіть відрізок AA_1, якщо $BB_1 = 10$ см, $CC_1 = 4$ см і точки A та C лежать по різні боки від площини α.

4.25.• Трикутник ABC не має спільних точок із площиною α. Відрізок BM — медіана трикутника ABC, точка O — середина відрізка BM. Через точки A, B, C, M і O проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках A_1, B_1, C_1, M_1 і O_1 відповідно. Знайдіть відрізок BB_1, якщо $AA_1 = 17$ см, $CC_1 = 13$ см, $OO_1 = 12$ см.

4.26.• Ребро AB тетраедра $DABC$ дорівнює 6 см. Знайдіть відстань між точками перетину медіан граней ADC і BDC.

4.27.• Основою піраміди $MABCD$ є квадрат $ABCD$, сторона якого дорівнює 12 см. Знайдіть відстань між точками перетину медіан граней AMD і DMC.

4.28.• Пряма a перетинає площини α і β у точках A і B відповідно (рис. 4.19). Пряма b, паралельна прямій a, перетинає площину α в точці C. Побудуйте точку перетину прямої b з площиною β.

4.29.$^{\bullet}$ Пряма a, яка належить площині α, паралельна прямій m — лінії перетину площин α і β (рис. 4.20). Точки A і B належать площині β. Чи існують на прямій a такі точки C і D, що $AC \parallel BD$?

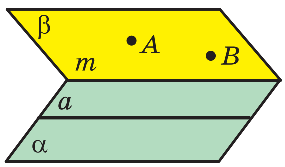


Рис. 4.20

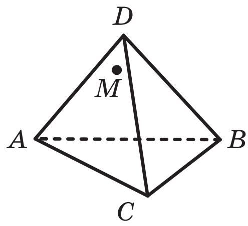


Рис. 4.21

4.30.$^{\bullet}$ На грані ADC тетраедра $DABC$ позначили точку M (рис. 4.21). Побудуйте точку, у якій пряма, що проходить через точку M паралельно прямій BD, перетинає площину ABC.

4.31.$^{\bullet}$ На грані ADD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначили точку K (рис. 4.22). Побудуйте точку, у якій пряма, що проходить через точку K паралельно прямій DB, перетинає площину ABB_1.

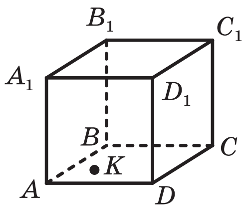


Рис. 4.22

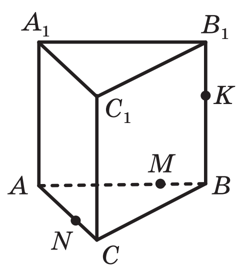


Рис. 4.23

4.32.$^{\bullet\bullet}$ На ребрах AD, BD і BC тетраедра $DABC$ позначили відповідно точки M, N і K. Побудуйте пряму, яка проходить через точку K і перетинає прямі AN і CM.

4.33.$^{\bullet\bullet}$ На ребрах AB, AC і BB_1 призми $ABCA_1B_1C_1$ позначили відповідно точки M, N і K (рис. 4.23). Побудуйте пряму, яка проходить через точку N і перетинає прямі CK і MC_1.

4.34.$^{\bullet\bullet}$ Вершина A паралелограма $ABCD$ належить площині α. Через вершини B, C і D проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках B_1, C_1 і D_1 відповідно. Знайдіть відрізок CC_1, якщо $DD_1 = 9$ см, $BB_1 = 26$ см.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

4.35. У гострокутному трикутнику ABC проведено висоти AM і CK. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника MBK, якщо $AC = 4\sqrt{3}$ см і $\angle ABC = 30°$.

4.36. Точка E — середина медіани BM трикутника ABC. Пряма AE перетинає сторону BC у точці K. Знайдіть відношення, у якому точка K ділить відрізок BC, рахуючи від вершини B.

5. Паралельність прямої та площини

Вам уже відомі два можливих випадки взаємного розміщення прямої та площини:

1) пряма належить площині, тобто всі точки прямої належать площині;
2) пряма перетинає площину, тобто пряма має з площиною тільки одну спільну точку.

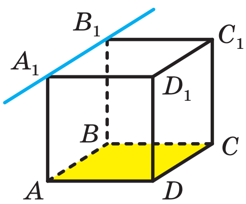


Рис. 5.1

Зрозуміло, що можливий і третій випадок, коли пряма та площина не мають спільних точок. Наприклад, пряма, яка містить ребро A_1B_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, не має спільних точок із площиною ABC (рис. 5.1).

Означення. Пряму та площину називають паралельними, якщо вони не мають спільних точок.

Якщо пряма a та площина α паралельні, то записують: $a \parallel \alpha$. Також прийнято говорити, що пряма a паралельна площині α, а площина α паралельна прямій a.

Наочне уявлення про пряму, паралельну площині, дає деяке спортивне знаряддя, наприклад бруси, паралельні площині підлоги (рис. 5.2). Інший приклад — водостічна труба: вона паралельна площині стіни (рис. 5.3).

З'ясовувати, чи є дані пряма та площина паралельними, за допомогою означення складно. Набагато ефективніше користуватися такою теоремою.

Теорема 5.1 (ознака паралельності прямої та площини). ***Якщо пряма, яка не належить даній площині, паралельна якій-небудь прямій, що лежить у цій площині, то дана пряма паралельна самій площині.***

Рис. 5.2

Рис. 5.3

Доведення. Нехай пряма a, яка не належить площині α, і пряма b, яка належить площині α, є такими, що $a \parallel b$. Доведемо, що $a \parallel \alpha$.

Припустимо, що пряма a перетинає площину α в деякій точці M (рис. 5.4). Якщо $M \in b$, то прямі a і b перетинатимуться, що суперечить умові $a \parallel b$. Якщо $M \notin b$, то за ознакою мимобіжних прямих прямі a і b будуть мимобіжними, що також суперечить умові $a \parallel b$. Отже, пряма a не може перетинати площину α. Таким чином, $a \parallel \alpha$. ◀

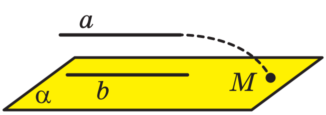


Рис. 5.4

На рисунку 5.1 прямі A_1B_1 і AB містять протилежні сторони квадрата ABB_1A_1. Ці прямі паралельні. Оскільки $AB \subset ABC$, то за ознакою паралельності прямої та площини $A_1B_1 \parallel ABC$.

Відрізок називають **паралельним площині**, якщо він належить прямій, паралельній цій площині. Наприклад, ребро AB куба паралельне площині CDD_1 (рис. 5.1).

Ви вмієте встановлювати паралельність двох прямих за допомогою теорем-ознак, відомих із планіметрії. Розглянемо теореми, які описують достатні умови паралельності двох прямих у просторі.

Теорема 5.2. ***Якщо площина проходить через дану пряму, паралельну другій площині, та перетинає цю площину, то пряма перетину площин паралельна даній прямій.***

Доведення. Нехай дано пряму a та площини α і β такі, що $a \parallel \alpha$, $a \subset \beta$, $\beta \cap \alpha = b$ (рис. 5.5). Доведемо, що $a \parallel b$.

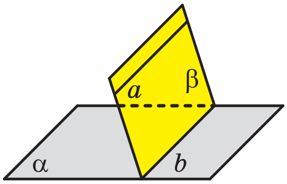


Рис. 5.5

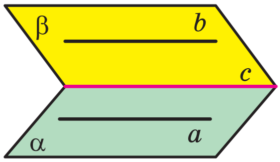


Рис. 5.6

Прямі a і b лежать в одній площині. Отже, вони або перетинаються, або паралельні. Якщо пряма a перетинає пряму b, то вона також перетинатиме площину α, що суперечить умові $a \parallel \alpha$. Отже, прямі a і b не перетинаються, тобто $a \parallel b$. ◀

Наслідок. ***Якщо пряма паралельна площині, то в цій площині існує пряма, паралельна даній прямій.***

Доведіть цей наслідок самостійно.

Теорема 5.3. ***Якщо через кожну з двох паралельних прямих проведено площину, причому ці площини перетинаються по прямій, відмінній від двох даних, то ця пряма паралельна кожній із двох даних прямих.***

Доведення. Нехай дано прямі a і b та площини α і β такі, що $a \parallel b$, $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, $\alpha \cap \beta = c$ (рис. 5.6). Доведемо, що $a \parallel c$ і $b \parallel c$.

Оскільки $a \parallel b$ і $b \subset \beta$, то за ознакою паралельності прямої та площини отримуємо, що $a \parallel \beta$. Через пряму a проходить площина α, яка перетинає площину β по прямій c. Тоді за теоремою 5.2 отримуємо, що $a \parallel c$. Аналогічно можна довести, що $b \parallel c$. ◀

Теорема 5.4. ***Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні між собою.***

Доведення. Нехай дано три прямі a, b і c такі, що $a \parallel c$ і $b \parallel c$. Доведемо, що $a \parallel b$.

Випадок, коли прямі a, b і c лежать в одній площині, розглянуто в планіметрії. Тепер розглянемо випадок, коли ці прямі не лежать в одній площині.

Виберемо на прямій a довільну точку M. Через пряму b і точку M проведемо площину α, а через пряму c і точку M — площину β (рис. 5.7). Нехай $\alpha \cap \beta = a_1$. Оскільки $b \parallel c$, то за теоремою 5.3 отримуємо, що $b \parallel a_1$ і $c \parallel a_1$. Тоді через точку M проходять дві прямі a і a_1, паралельні прямій c. Отже, прямі a і a_1 збігаються. Отримали, що $a \parallel b$. ◀

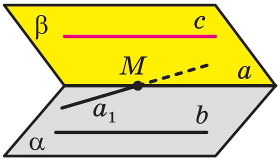


Рис. 5.7

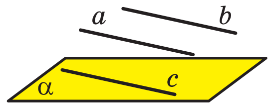


Рис. 5.8

Задача 1. Доведіть, що коли одна з двох паралельних прямих паралельна даній площині, а друга пряма не належить цій площині, то й друга пряма паралельна даній площині.

Розв'язання. Нехай дано прямі a і b та площину α такі, що $a \parallel b$ і $a \parallel \alpha$. Доведемо, що $b \parallel \alpha$.

Згідно з наслідком із теореми 5.2 в площині α знайдеться така пряма c, що $a \parallel c$ (рис. 5.8). Маємо: $b \parallel a$ і $a \parallel c$. Тоді за теоремою 5.4 отримуємо, що $b \parallel c$. Отже, за ознакою паралельності прямої та площини доходимо висновку, що $b \parallel \alpha$. ◄

Задача 2. Доведіть, що коли пряма паралельна кожній із двох площин, що перетинаються, то вона паралельна прямій їхнього перетину.

Розв'язання. Нехай дано пряму a та площини α і β такі, що $a \parallel \alpha$, $a \parallel \beta$, $\alpha \cap \beta = b$ (рис. 5.9). Доведемо, що $a \parallel b$.

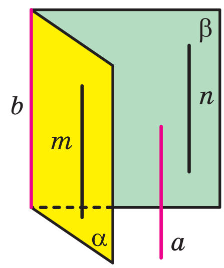


Рис. 5.9

За наслідком із теореми 5.2 у площинах α і β знайдуться відповідно такі прямі m і n, що $m \parallel a$ і $n \parallel a$. Якщо хоча б одна з прямих m і n збігається з прямою b, то твердження задачі доведено. Якщо ж кожна з прямих m і n відмінна від прямої b, то за теоремою 5.4 отримуємо, що $m \parallel n$.

Скориставшись теоремою 5.3, доходимо висновку, що $b \parallel n$. Але $n \parallel a$, отже, $a \parallel b$. ◄

Задача 3. Побудуйте переріз трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ площиною, яка проходить через ребро AC основи та точку M, що належить ребру A_1B_1 другої основи.

Розв'язання. Січна площина та площина $A_1B_1C_1$ мають спільну точку M, отже, вони перетинаються по прямій, яка проходить через точку M (рис. 5.10).

Оскільки чотирикутник AA_1C_1C — паралелограм, то пряма AC паралельна прямій A_1C_1. Отже, $AC \parallel A_1B_1C_1$. Тоді за теоремою 5.2 січна площина перетинає площину $A_1B_1C_1$ по прямій, паралельній прямій AC.

У площині $A_1B_1C_1$ через точку M проведемо пряму, паралельну прямій A_1C_1 (рис. 5.10). Нехай ця пряма перетинає ребро B_1C_1 у точці N. За теоремою 5.4 отримуємо, що $MN \parallel AC$. Тоді чотирикутник $AMNC$ — шуканий переріз. ◄

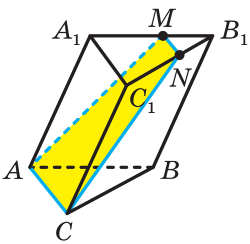


Рис. 5.10

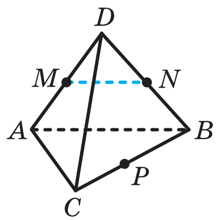


Рис. 5.11

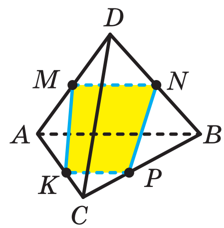


Рис. 5.12

Задача 4. Побудуйте переріз тетраедра $DABC$ площиною, яка проходить через середини M і N відповідно ребер AD і BD та точку P, що належить ребру BC.

Розв'язання. Сполучимо точки M і N (рис. 5.11). Оскільки відрізок MN — середня лінія трикутника ADB, то $MN \parallel AB$. Отже, $MN \parallel ABC$.

За теоремою 5.2 січна площина перетинає площину ABC по прямій, паралельній прямій MN, причому ця пряма проходить через точку P. Проведемо через точку P пряму, паралельну прямій MN. Нехай K — точка перетину проведеної прямої зі стороною AC (рис. 5.12). Чотирикутник $KMNP$ — шуканий переріз. ◄

?

1. У якому разі пряму та площину називають паралельними?
2. Сформулюйте ознаку паралельності прямої та площини.
3. Який відрізок називають паралельним площині?
4. Сформулюйте теореми, які описують достатні умови паралельності двох прямих у просторі.

ВПРАВИ

5.1.° Укажіть серед предметів, що нас оточують, моделі площини та прямої, яка їй паралельна.

5.2.° Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 5.13). Площинам яких граней куба паралельне ребро: 1) AD; 2) C_1D_1; 3) BB_1?

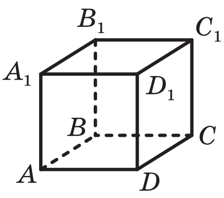


Рис. 5.13

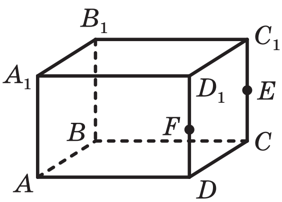


Рис. 5.14

5.3.° Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 5.14), точки E і F — середини ребер CC_1 і DD_1 відповідно. Запишіть грані паралелепіпеда, яким паралельна пряма: 1) AB; 2) CC_1; 3) AC; 4) EF.

5.4.° Пряма a паралельна площині α. Чи є правильним твердження, що пряма a паралельна будь-якій прямій, що лежить у площині α?

5.5.° Дано прямі a і b та площину α. Чи є правильним твердження:
1) якщо $a \parallel \alpha$ і $b \parallel \alpha$, то $a \parallel b$;
2) якщо $a \parallel b$ і $b \parallel \alpha$, то $a \parallel \alpha$;
3) якщо $a \parallel b$ і $b \subset \alpha$, то $a \parallel \alpha$?

5.6.° Пряма a та площина α паралельні прямій b. Яким може бути взаємне розміщення прямої a та площини α?

5.7.° Прямі a і b перетинаються, а площина α паралельна прямій a. Яким може бути взаємне розміщення прямої b і площини α?

5.8.° Вершини E і F правильного шестикутника $ABCDEF$ лежать у площині α, відмінній від площини шестикутника (рис. 5.15). Яким є взаємне розміщення площини α і прямої: 1) BC; 2) AB; 3) BD; 4) AD?

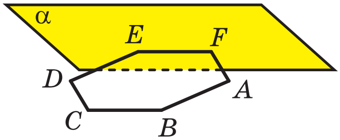


Рис. 5.15

5.9.° Точки M і K — середини відповідно сторін AB і BC трикутника ABC. Точка D не належить площині ABC. Доведіть, що $MK \parallel ADC$.

5.10.° Точки E і F — середини відповідно бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$. Пряма EF лежить у площині α, відмінній від площини трапеції. Доведіть, що прямі AD і BC паралельні площині α.

5.11.° Відрізки BC і AD — основи трапеції $ABCD$. Трикутник BMC і трапеція $ABCD$ не лежать в одній площині (рис. 5.16). Точка E — середина відрізка BM, точка F — середина відрізка CM. Доведіть, що $EF \parallel AD$.

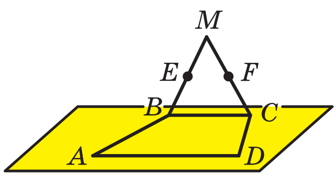


Рис. 5.16

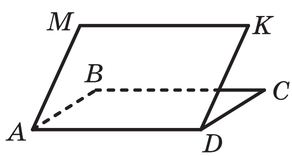


Рис. 5.17

5.12.° Паралелограми $ABCD$ і $AMKD$ не лежать в одній площині (рис. 5.17). Доведіть, що чотирикутник $BMKC$ — паралелограм.

5.13.• Площина α, паралельна стороні AC трикутника ABC, перетинає сторони AB і BC у точках A_1 і C_1 відповідно (рис. 5.18). Знайдіть відрізок A_1C_1, якщо $AC = 18$ см і $AA_1 : A_1B = 7 : 5$.

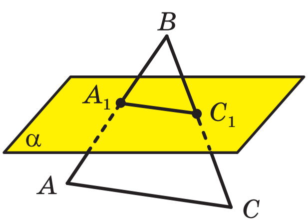


Рис. 5.18

5.14.• Площина α, паралельна стороні AB трикутника ABC, перетинає сторони AC і BC у точках E і F відповідно. Знайдіть відношення $AE : EC$, якщо $CF : CB = 3 : 11$.

5.15.• Вершини A і C трикутника ABC належать площині α, а вершина B не належить цій площині. На сторонах AB і BC позначено відповідно точки E і F так, що $BA : BE = BC : BF$. Доведіть, що пряма EF паралельна площині α.

5.16.• Точка M — середина сторони AB трикутника ABC. Площина α проходить через точку M паралельно прямій AC і перетинає сторону BC у точці K. Доведіть, що точка K — середина сторони BC. Знайдіть площу чотирикутника $AMKC$, якщо площа трикутника ABC дорівнює 28 см^2.

5.17.˚ На ребрі CC_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначили точку M (рис. 5.19). Побудуйте лінію перетину площин: 1) ADM і BB_1C_1; 2) AA_1M і DCC_1.

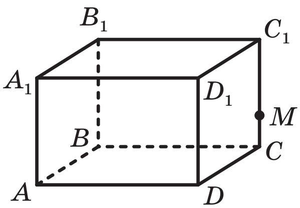


Рис. 5.19

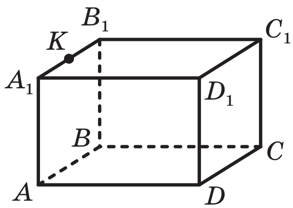


Рис. 5.20

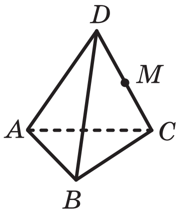


Рис. 5.21

5.18.˚ На ребрі A_1B_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначили точку K (рис. 5.20). Побудуйте лінію перетину площин: 1) CC_1K і ABB_1; 2) CDK і ABB_1.

5.19.˚ Точка M — середина ребра DC тетраедра $DABC$ (рис. 5.21). Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через точку M і паралельна прямим AD і BD. Обчисліть площу перерізу, якщо кожне ребро тетраедра дорівнює a.

5.20.˚ Точка E — середина ребра AD тетраедра $DABC$ (рис. 5.22). Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через точки B і E та паралельна прямій AC. Обчисліть периметр перерізу, якщо кожне ребро тетраедра дорівнює 4 см.

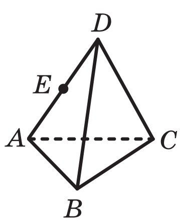


Рис. 5.22

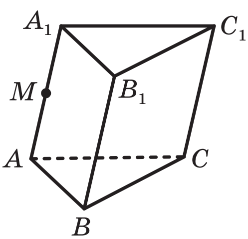


Рис. 5.23

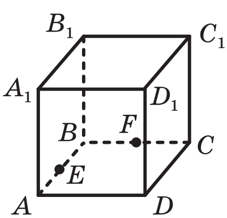


Рис. 5.24

5.21.˚ Точка M належить ребру AA_1 призми $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 5.23). Побудуйте переріз призми площиною, яка проходить через точки M і C_1 та паралельна прямій AB.

5.22.˚ Точки E і F — середини відповідно ребер AB і BC куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 5.24). Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через точки E і F та паралельна прямій DD_1. Обчисліть периметр перерізу, якщо ребро куба дорівнює a.

5.23.• Дано тетраедр $DABC$. Площина α проходить через пряму CD і паралельна прямій AB. Побудуйте лінію перетину площини α і площини ABC.

5.24.• Точка M не належить площині паралелограма $ABCD$. Побудуйте лінію перетину площин AMB і CMD.

5.25.• Точки E, F, M і K — середини відповідно ребер AB, BC, AD і CD тетраедра $DABC$. Доведіть, що відрізки MF і KE перетинаються та точкою перетину діляться навпіл.

5.26.• Пряма a належить площині α, пряма b — площині β, пряма c — лінія перетину площин α і β. Доведіть, що коли пряма c не перетинає жодну з прямих a і b, то $a \parallel b$.

5.27.• Пряма a паралельна площині α. Через точку M, яка лежить у площині α, проведено пряму b, паралельну прямій a. Доведіть, що пряма b лежить у площині α.

5.28.• Доведіть, що через кожну з двох мимобіжних прямих проходить площина, паралельна другій прямій, і до того ж тільки одна.

5.29.• Доведіть, що коли дві дані площини, що перетинаються, перетинають третю площину по паралельних прямих, то лінія перетину даних площин паралельна цій третій площині.

5.30.• Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через середини ребер AB, CD і AA_1. Знайдіть периметр перерізу, якщо $AB = 10$ см, $AD = 17$ см, $AA_1 = 24$ см.

5.31.• На ребрі BC тетраедра $DABC$ позначили точку E так, що $BE : EC = 2 : 1$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через точку E паралельно прямим AB і CD. Знайдіть периметр перерізу, якщо $AB = 18$ см, $CD = 12$ см.

5.32.• На ребрах AD і BC тетраедра $DABC$ позначили відповідно точки M і K (рис. 5.25). Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через пряму MK паралельно прямій CD.

5.33.• На ребрах AD і BC тетраедра $DABC$ позначили відповідно точки M і K (рис. 5.25). Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через пряму MK паралельно прямій AB.

5.34.•• На ребрах AB і C_1D_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначили відповідно точки M і K. Побудуйте лінію перетину площин AA_1K і DD_1M. Яким є взаємне розміщення побудованої прямої та прямої AA_1?

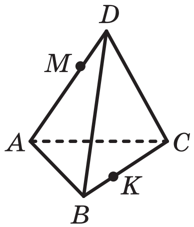


Рис. 5.25

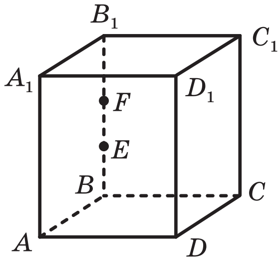


Рис. 5.26

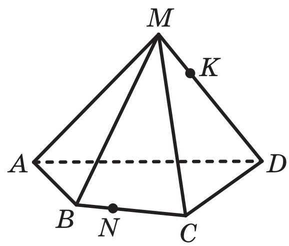


Рис. 5.27

5.35.•• На ребрі BB_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначили точки E і F (рис. 5.26). Побудуйте лінію перетину площин AFD і A_1ED_1. Яким є взаємне розміщення побудованої прямої та прямої BC?

5.36.•• Точки E і F — середини відповідно ребер AD і CD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через пряму EF паралельно прямій B_1D.

5.37.•• Точка M — середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через точки D і M паралельно прямій AC_1.

5.38.•• Точки M, N і K — середини відповідно ребер AB, BC і CA призми $ABCA_1B_1C_1$. Доведіть, що прямі C_1M, A_1N і B_1K перетинаються в одній точці.

5.39.•• Точки E, F і K — середини відповідно ребер AD, A_1B_1 і CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте переріз куба площиною EFK.

5.40.•• Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка O — центр квадрата $ABCD$, точка O_1 — центр квадрата $A_1B_1C_1D_1$, точка E — середина ребра AD, точка F — середина ребра CD, точка M — середина відрізка OO_1. Побудуйте переріз куба площиною EMF.

5.41.•• Дано піраміду $MABCD$ (рис. 5.27). На ребрі BC позначили точку N, на ребрі MD — точку K. Побудуйте переріз піраміди площиною, яка проходить через точки N і K паралельно прямій MC.

5.42.•• Дано піраміду $MABCD$ (рис. 5.27). На ребрі BC позначили точку N, на ребрі MD — точку K. Побудуйте переріз піраміди площиною, яка проходить через точки N і K паралельно прямій CD.

5.43.•• Основою піраміди $SABCD$ є паралелограм $ABCD$. Побудуйте переріз цієї піраміди площиною, що проходить через середину ребра AB і паралельна прямим AC і SD. У якому відношенні січна площина ділить ребро SB, рахуючи від точки S?

5.44.•• Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через середину ребра AB і паралельна прямим A_1C_1 і BD_1. У якому відношенні січна площина ділить відрізок DB_1, рахуючи від точки D?

5.45.* Точки M, N і K належать відповідно граням AA_1C_1C, AA_1B_1B і BB_1C_1C призми $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 5.28). Побудуйте переріз призми площиною MNK.

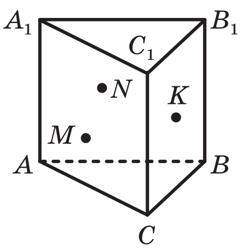


Рис. 5.28

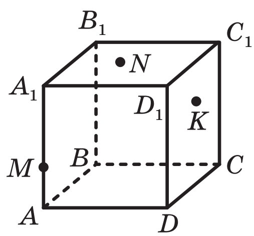


Рис. 5.29

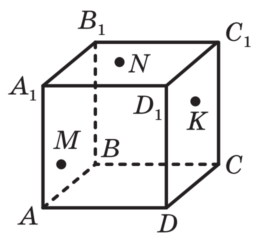


Рис. 5.30

5.46.* На ребрі AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначили точку M (рис. 5.29). Точки N і K належать граням BB_1C_1C і DD_1C_1C відповідно. Побудуйте переріз куба площиною MNK.

5.47.* Точки M, N і K належать відповідно граням AA_1B_1B, BB_1C_1C і CC_1D_1D куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 5.30). Побудуйте переріз куба площиною MNK.

5.48.* Основою піраміди $SABCD$ є трапеція $ABCD$, у якій $AD \parallel BC$ і $\frac{AD}{BC} = 3$. Точки M і N — середини ребер SA і SB відповідно. У якому відношенні площина MND ділить ребро SC, рахуючи від точки S?

5.49.* Основою піраміди $SABCDE$ є п'ятикутник $ABCDE$. На ребрах SE і SD позначили відповідно точки M і N (рис. 5.31). Відомо, що $\frac{SM}{SE} = \frac{SN}{SD}$. Побудуйте переріз піраміди площиною BMN.

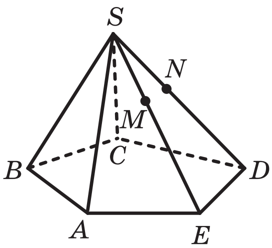


Рис. 5.31

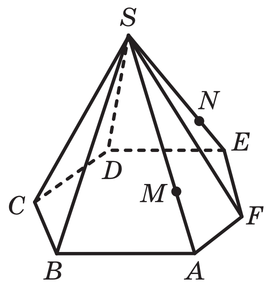


Рис. 5.32

5.50.* Основою піраміди $SABCDEF$ є шестикутник $ABCDEF$. На ребрах SA і SE позначили відповідно точки M і N (рис. 5.32). Відомо, що $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SE}$. Побудуйте переріз піраміди площиною CMN.

5.51.* Точки M, N і K — середини відповідно ребер BD, CD і AB тетраедра $DABC$. На прямих BN і CK позначено відповідно точки F і E так, що $FE \parallel AM$. Знайдіть відношення $\frac{FE}{AM}$.

5.52.* У тетраедрі $DABC$ проведено медіани AM і BN відповідно граней ABC і ADB. На прямих AM і BN позначили точки P і Q відповідно так, що $PQ \parallel CD$. Знайдіть відношення $\frac{PQ}{CD}$.

5.53.* Точки M і N — середини відповідно ребер AA_1 і BB_1 призми $ABCA_1B_1C_1$. На відрізках BM і AC_1 відповідно позначили точки P і K так, що $PK \parallel CN$. Знайдіть відношення $\frac{PK}{CN}$.

5.54.* Точка M — середина ребра CC_1 призми $ABCA_1B_1C_1$. На відрізках BM і CA_1 відповідно позначили точки E і F так, що $EF \parallel AB_1$. Знайдіть відношення $\frac{EF}{AB_1}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

5.55. У прямокутному трикутнику ABC катет BC дорівнює 7 см, а радіус описаного кола — 9 см. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену з гострого кута B.

5.56. Бічні сторони прямокутної трапеції відносяться як 3 : 5, а різниця основ дорівнює 16 см. Знайдіть площу трапеції, якщо її менша діагональ дорівнює 13 см.

6. Паралельність площин

Розглянемо варіанти можливого взаємного розміщення двох площин.

Ви знаєте, що дві площини можуть мати спільні точки, тобто перетинатися. Зрозуміло, що дві площини можуть і не мати спільних точок. Наприклад, площини ABC і $A_1B_1C_1$, які містять основи призми, не мають спільних точок (рис. 6.1).

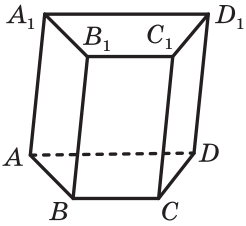


Рис. 6.1

Означення. Дві площини називають паралельними, якщо вони не мають спільних точок.

Якщо площини α і β паралельні, то записують: $\alpha \parallel \beta$. Також прийнято говорити, що площина α паралельна площині β або площина β паралельна площині α.

Наочне уявлення про паралельні площини дають стеля та підлога кімнати; поверхня води, налитої в акваріум, і його дно (рис. 6.2).

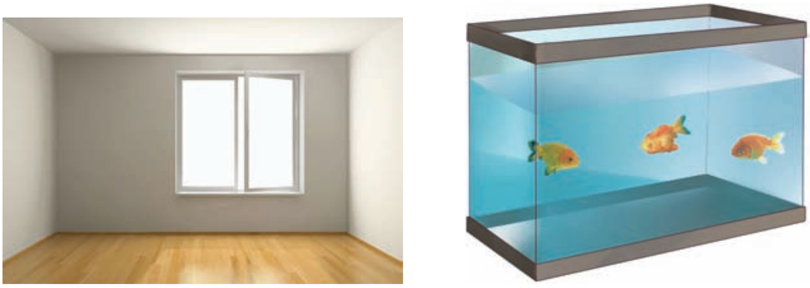


Рис. 6.2

З означення паралельних площин випливає, що *будь-яка пряма, що лежить в одній із двох паралельних площин, паралельна другій площині*. Доведіть це твердження самостійно.

У тих випадках, коли треба з'ясувати, чи є дві площини паралельними, зручно користуватися такою теоремою.

Теорема 6.1 (ознака паралельності двох площин). ***Якщо дві прямі, що перетинаються, однієї площини паралельні відповідно двом прямим другої площини, то ці площини паралельні.***

Доведення. Нехай дано прямі a і b, які перетинаються та належать площині α, і прямі a_1 і b_1, які належать площині α_1, такі, що $a \parallel a_1$ і $b \parallel b_1$. Доведемо, що $\alpha \parallel \alpha_1$.

Припустимо, що площини α і α_1 перетинаються. Нехай $\alpha \cap \alpha_1 = c$ (рис. 6.3).

Оскільки $a \parallel a_1$ і $a_1 \subset \alpha_1$, то за ознакою паралельності прямої та площини $a \parallel \alpha_1$.

Через пряму a проходить площина α, яка перетинає площину α_1 по прямій c. Тоді за теоремою 5.2 отримуємо, що $a \parallel c$. Аналогічно можна довести, що $b \parallel c$.

Таким чином, отримали, що в площині α кожна з двох прямих a і b, які перетинаються, паралельна прямій c. А це суперечить аксіомі паралельності прямих.

Отже, припущення про те, що площини α і α_1 перетинаються, є хибним, тому $\alpha \parallel \alpha_1$. ◀

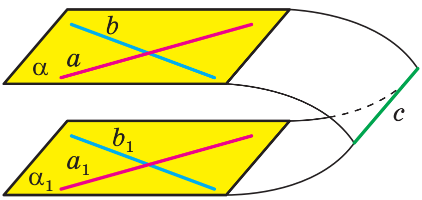


Рис. 6.3

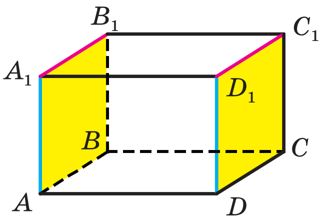


Рис. 6.4

На рисунку 6.4 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Маємо: $AA_1 \parallel DD_1$ і $A_1B_1 \parallel D_1C_1$. Тоді за ознакою паралельності двох площин $AA_1B_1 \parallel DD_1C_1$.

Наслідок. ***Якщо кожна з двох прямих однієї площини, які перетинаються, паралельна другій площині, то ці площини паралельні.***

Доведіть цей наслідок самостійно.

Будемо говорити, що **два многокутники паралельні**, якщо вони лежать у паралельних площинах. Наприклад, грані AA_1B_1B і DD_1C_1C прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ паралельні (рис. 6.4).

Розглянемо деякі властивості паралельних площин.

Теорема 6.2. ***Через точку в просторі, яка не належить даній площині, проходить площина, паралельна даній площині, і до того ж тільки одна.***

Доведення. Нехай дано площину α і точку A, яка їй не належить (рис. 6.5). Доведемо, що через точку A проходить площина, паралельна площині α.

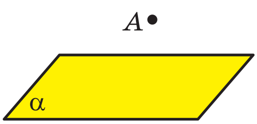


Рис. 6.5

У площині α проведемо дві прямі a і b, що перетинаються. Через точку A проведемо прямі a_1 і b_1 такі, що $a_1 \parallel a$ і $b_1 \parallel b$ (рис. 6.6). Прямі a_1 і b_1, що перетинаються, визначають деяку площину β. За ознакою паралельності двох площин $\alpha \parallel \beta$.

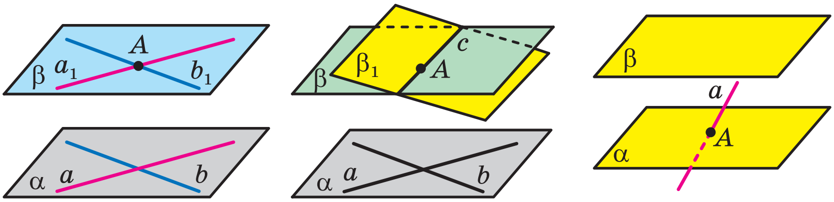


Рис. 6.6 **Рис. 6.7** **Рис. 6.8**

Тепер доведемо, що площина β є єдиною.

Припустимо, що існує ще одна площина β_1 така, що $A \in \beta_1$ і $\alpha \parallel \beta_1$. Площини β і β_1 мають спільну точку A, отже, вони перетинаються. Нехай $\beta \cap \beta_1 = c$ (рис. 6.7).

Оскільки $\alpha \parallel \beta$ і $a \subset \alpha$, то $a \parallel \beta$. Аналогічно можна довести, що $a \parallel \beta_1$. Отже, за ключовою задачею 2 п. 5 пряма a паралельна прямій перетину площин β і β_1, тобто $a \parallel c$.

Аналогічно можна довести, що $b \parallel c$.

Таким чином, пряма c паралельна кожній із прямих a і b, що перетинаються. Отримана суперечність дає змогу зробити висновок, що площина β є єдиною. ◀

Наслідок 1. ***Якщо пряма перетинає одну з двох паралельних площин, то вона перетинає й другу площину.***

Доведення. Розглянемо пряму a та площини α і β такі, що $\alpha \parallel \beta$ і $a \cap \alpha = A$ (рис. 6.8). Доведемо, що пряма a перетинає площину β.

Припустимо, що пряма a не перетинає площину β. Тоді $a \parallel \beta$. У площині α через точку A проведемо пряму b. Тоді $b \parallel \beta$. Через прямі a і b, які перетинаються, проведемо площину γ. За наслідком з теореми 6.1 отримуємо, що $\gamma \parallel \beta$. Доходимо висновку, що через точку A проходять дві площини α і γ, паралельні площині β, а це суперечить теоремі 6.2. ◀

Наслідок 2. ***Усі прямі, які проходять через дану точку поза даною площиною та паралельні їй, лежать в одній площині.***

ЗМІСТ